Exercice 2 3 points

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par :
$z_0=100$ et pour tout entier naturel n $z_{n+1}=\frac{i}{3}z_n$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0;\vec{u};\vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n .

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tel que $AM < r$.
Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

CORRECTION

1. Pour tout entier naturel n :

$z_{n+2}=\frac{i}{3}z_{n+1}=\frac{i^2}{9}z_n=-\frac{1}{9}z_n$

$\overrightarrow{OM_n}(z_n)$ $\overrightarrow{OM_{n+2}}(z_{n+2})$

donc $\overrightarrow{OM_{n+2}}=-\frac{1}{9}\overrightarrow{OM_n}$ et les vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OM_{n+2}}$ sont colinéaires.

Conséquence

Les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2. On remarque :

$OM_0=|z_0|=100$ $OM_1=|z_1|=\left|\frac{i}{3}\right|\times|z_0|=\frac{100}{3}$ $OM_2=|z_2|=\frac{100}{9}$.

Pour tout entier naturel n, on conjecture que $OM_n=|z_n|=\frac{100}{3^n}$

. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $|z_n|=\frac{100}{3^n}$.

Initialisation

$|z_0|=100$ et $\frac{100}{3^0}=\frac{100}{1}=100$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $|z_n|=\frac{100}{3^n}$

et on doit démontrer que $|z_{n+1}|=\frac{100}{3^{n+1}}$.

Or $z_{n+1}=\frac{i}{3}z_n$ donc $|z_{n+1}|=\left|\frac{i}{3}\right|\times|z_n|=\frac{1}{3}\times\frac{100}{3^n}=\frac{100}{3^{n+1}}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $|z_n|=\frac{100}{3^n}$.

. M_n appartient au disque de centre O et de rayon 1 si et seulement si $OM_n\leqslant 1$ c'est à dire $|z_n|\leqslant 1$.

$|z_n|\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{100}{3^n}\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 100\leqslant 3^n$

ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln(100)\leqslant\ln(3^n) \quad\Leftrightarrow\quad \ln(100)\leqslant n\times\ln(3)$

$1<3$ donc $0<\ln(3)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(100)}{\ln(3)}\leqslant n$

En utilisant la calculatrice

$\frac{\ln(100)}{\ln(3)}=4{,}19$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel

$|z_n|\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 5\leqslant n$

Conclusion

Tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1 à partir du rang 5.