Exercice 3 5 points

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1;+\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :
$f(x)=\frac{1}{x}\ln(x)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale.

2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1;+\infty[$.

3. Étudier les variation de la fonction f sur $[1;+\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,dx$ pour tout entier naturel n.

1. Démontrer que $u_0=\frac{1}{2}(\ln(2))^2$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;2] on a :

$0\leqslant\frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\leqslant\frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)$.

3. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$0\leqslant u_n\leqslant\frac{\ln(2)}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 $f(x)=\frac{1}{x}\ln(x)$.

1. Le cours nous donne : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et **la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation y=0 pour asymptote horizontale.**

2. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :
$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ et $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
On dérive un produit : $f(x)=\frac{1}{x}\times\ln(x)$
$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln(x)+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}\ln(x)+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\ln(x))$

3. Le signe de $f'(x)$ sur $[1;+\infty[$ est le signe de : $1-\ln(x)$
$1-\ln(x)\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1\leqslant\ln(x) \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}\leqslant x$
$1-\ln(x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}>x\ (\geqslant 1)$
On donne le tableau de variation de f

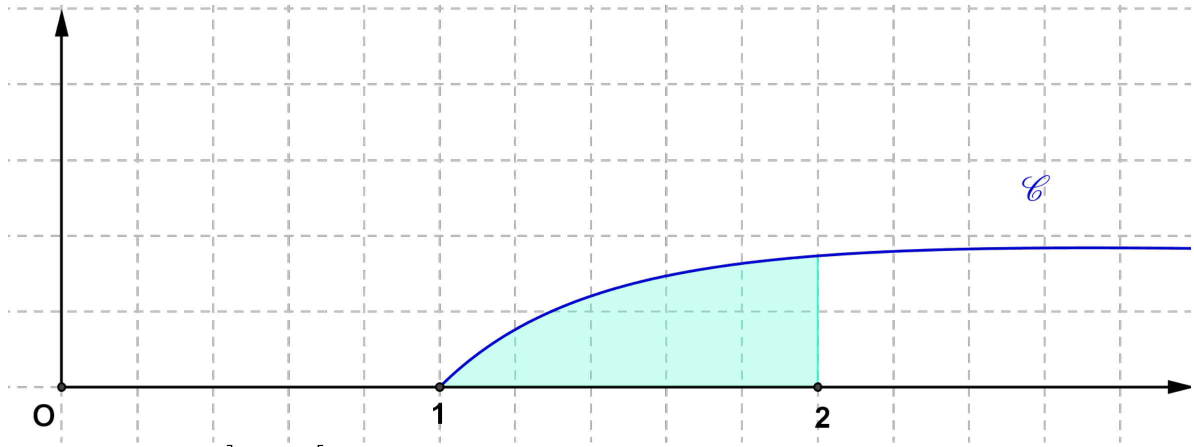
x	1		e		+∞
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$f(1)=0$ et $f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$

Partie B

1. $u_0=\int_1^2\frac{1}{x}\ln(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx$
$f(x)=\frac{1}{x}\ln(x)=v(x)\times v'(x)$
Si $v(x)=\ln(x)$ alors $v'(x)=\frac{1}{x}$ et une primitive F de f sur $[1;+\infty[$ est définie par :
$F(x)=\frac{(v(x))^2}{2}=\frac{(\ln(x))^2}{2}$
<u>Conséquence</u>
$u_0=F(2)-F(1)=\frac{(\ln(2))^2}{2}=\frac{1}{2}(\ln(2))^2$

f est continue et positive sur [1;2] donc u_0 est l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=2.
(Partie colorée sur la figure suivante non demandée dans l'énoncé)



2. ln est croissante sur $]0;+\infty[$

Si $1\leqslant x\leqslant 2$ alors $\ln(1)\leqslant \ln(x)\leqslant \ln(2)$ soit $0\leqslant \ln(x)\leqslant \ln(2)$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;2] et pour tout entier naturel n non nul : $\frac{1}{x^{n+1}}>0$

donc $\frac{1}{x^{n+1}}\times 0\leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\times \ln(x)\leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\times \ln(2)$ soit $0\leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)$

3. En utilisant les propriétés des intégrales :

$$0\leqslant \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,dx \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\,dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,dx=u_n$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\,dx=\ln(2)\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\,dx$$

Pour tout entier naturel n non nul

Soit g la fonction définie sur [1;2] pat $g(x)=\frac{1}{x^{n+1}}=x^{-n-1}$

$$G(x)=\frac{x^{-n}}{-n}=-\frac{1}{n}\times\frac{1}{x^n}$$

G est une primitive de g sur [1;2].

$$\int_1^2 g(x)\,dx=G(2)-G(1)=-\frac{1}{n}\times\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\ln(2)\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\,dx=\frac{\ln(2)}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

<u>Conclusion</u>

$$0\leqslant u_n\leqslant \frac{\ln(2)}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(2)}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(2)}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=0.$

<u>Conséquence</u>

Le théorème des gendarmes permet de conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

