Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points A(1;1;14), B(0;1;8) et C(-2;2;4) ainsi que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\8\\-1\end{pmatrix}$.

1.a. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
1.b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
1.c. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $6x+8y-z=0$

2. On considère la droite Δ des points M de coordonnées (x;y;z) sont données par :

$$\begin{cases} x= 2t-3 \\ y=t-\dfrac{1}{2} \\ z= 4t+2 \end{cases} \quad t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

2.a. Donner un vecteur directeur de la droite Δ.
2.b. La droite Δ et le plan (ABC) sont-ils sécants ?

3. Dans cette question, on considère l'ensemble (E) des points M dont les coordonnées (x;y;z) sont données par :

$$\begin{cases} x=t^3+t \\ y= t+1 \\ z= 2t \end{cases} \quad t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

Démontrer qu'il existe un unique point M qui appartient à la fois à (E) et à (ABC).
Il n'est pas demandé de déterminer ses coordonnées.

CORRECTION

1.a. $A(1;1;14)$, $B(0;1;8)$ et $C(-2;2;4)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\-10\end{pmatrix}$.

Il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC}=k.\overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc **les points A, B et C ne sont alignés et ces points déterminent un plan.**

1.b. $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\8\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\-10\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=6\times(-1)+8\times0+(-1)\times(-6)=-6+6=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=6\times(-3)+8\times1+(-1)\times(-10)=-18+8+10=0$

donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1.c. $M(x;y;z)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y\\z+6\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\8\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=(x+1)\times6+y\times8+(z+6)\times(-1)=6x+6+8y-z-6=6x+8y-z$

Conclusion

6x+8y-z=0 est une équation cartésienne du plan (ABC).

2.a. **Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ.**

2.b. Δ est parallèle au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Δ et (ABC) sont sécants si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

$\vec{n}.\vec{v}=6\times2+8\times1+(-1)\times4=12+8-16$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

Conclusion

Le plan (ABC) et la droite Δ sont sécants.

3. Pour déterminer l'intersection de (E) et (ABC), on résout le système :

$$\begin{cases}6x+8y-z=0\\ x=t^3+t\\ y=t+1\\ z=2t\end{cases}$$

On obtient l'équation :

$6(t^3+t)+8(t+1)-(2t)=0 \Leftrightarrow 6t^3+6t+8t+8-2t=0 \Leftrightarrow 6t^3+12t+4=0 \Leftrightarrow 3t^3+6t+4=0$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=3t^3+6t+4$.

$f'(t)=6t^2+6>0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires, nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α par f dans $\mathbb{R}$.

Donc l'équation admet une unique solution α.

Conséquence

(E) et (ABC) admettent un unique point d'intersection M $(\alpha^3+\alpha;\alpha+1;2\alpha)$.