## Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

**1.** Soit p un entier relatif donné.
On s'intéresse dans cette question à l'équation $(E_p)$ : $3x+4y=p$ où (x;y) est un couple d'entiers relatifs.

**1.a.** vérifier que le couple (-p;p) est une solution particulière de l'équation.

**1.b.** Démontrer que l'ensemble des solutions de $(E_p)$ est l'ensemble des couples de la forme : (-p+4k;p-3k) où k est un entier relatif.

Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère le plan P d'équation cartésienne : $6x+8y-z=0$.

**2.** Soit $M_0$ un point de coordonnées $(x_0;y_0;z_0)$ qui appartient au plan P et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.

**2.a.** Démontrer que $z_0$ est pair.

**2.b.** On pose $z_0=2p$ où p est un entier relatif.
Prouver que le couple $(x_0;y_0)$ est solution de l'équation $(E_p)$.

**2.c.** En utilisant la question 1, déterminer l'ensemble des points du plan P à coordonnées entières.

**3.** À tout point M de coordonnées (x;y;z), on associe le point $M'$ de coordonnées (x';y';z') avec :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 180 \\ 56 & 41 & -144 \\ 28 & -30 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**3.a.** Montrer que $6x'+8y'-z'=101(6x+8y-z)$

**3.b.** En déduire que si le point M est un point du plan P, alors le point $M'$ est aussi un point du plan P.

**3.c.** Soit $\Delta$ la droite perpendiculaire à P passant par O.
Montrer que si le point M appartient à $\Delta$, alors le point $M'$ appartient aussi à $\Delta$.

**CORRECTION**

**1.** $(E_p)$ : 3x+4y=p

x, y et p sont des entiers relatifs.

**1.a.** $3\times(-p)+4\times p=-3p+4p=p$

donc **le couple (-p;p) est une solution particulière de l'équation $(E_p)$ .**

**1.b.** $3x+4y=p \Leftrightarrow 3x+4y=3\times(-p)+4\times p \Leftrightarrow 3(x+p)=4(-y+p)$

3 divise 4(-y+p) et 3 est premier avec 4, le théorème de Gauss nous permet d'affirmer que 3 divise (-y+p) c'est à dire il existe un entier relatif k tel que $(-y+p)=3k$ .

Pour tout entier relatif k tel que $(-y+p)=3k$ , on a :

$3(x+p)=4(-y+p)=4\times 3k \Leftrightarrow x+p=4k$

donc $x=-p+4k$ et $y=p-3k$

Conclusion

**L'ensemble des solutions de l'équation $(E_p)$ est l'ensemble des couples de la forme (-p+4k;p-3k) où k est un entier relatif.**

**2.a.** $M_0$ appatient au plan P si et seulement si $6x_0+8y_0-z_0=0 \Leftrightarrow z_0=6x_0+8y_0=2(3x_0+4y_0)$

$3x_0+4y_0$ est un entier relatif donc $z_0$ **est un nombre pair.**

**2.b.** On pose $z_0=2p$ donc $2p=6x_0+8y_0 \Leftrightarrow p=3x_0+4y_0$

Conséquence

$(x_0;y_0)$ **est une solution de** $(E_p)$.

**2.c.** Il existe donc un entier relatif k tel que $x_0=-p+4k$ et $y_0=p-3k$ .

**L'ensemble des points M du plan P de coordonnées entières est l'ensembe des points M de coordonnées de la forme (-p+4k;p-3k,2p) où p et k sont des entiers relatifs.**

**3.a.** $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 31 & 75 & 180 \\ 56 & 41 & -144 \\ 28 & -30 & 29 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 31x+75y+180z \\ 56x+41y-144z \\ 28x-30y+29z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=31x+75y+180z \\ y'=56x+41y-144z \\ z'=28x-30y+29z \end{cases}$

$6x'+8y'-z'=6(31x+75y+180z)+8(56x+41y-144z)-(28x-30y+29z)$

$=186x+450y+1080z+448x+328y-1152z-28x+30y-29z=606x+808y-101z$

**6x'+8y'-z'=101(6x+8y-z)**

**3.b.** M appartient au plan P si et seulement si $6x+8y-z=0$ donc $101(6x+8y-z)=0$

et $8x'+8y'-z'=0$ et **le point M' apartient au plan P.**

**3.c.** Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P, le repère est orthonormé, $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\Delta$ .

$\Delta$ passe par l'origine $O(0;0;0)$ .

On obtient pour représentation paramétrique de $\Delta$ : $\begin{cases} x=6t \\ y=8t \\ z=-t \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$

$x'=31x+75y+180z=31\times 6t+75\times 8t+180\times(-t)=186t+600t-180t=606t$

$y'=56x+41y-144z=56\times 6t41\times 8t-144\times(-t)=336t+328t+144t=808t$

$z'=28x-30y+29z=28\times 6t-30\times 8t+29\times(-t)=168t-240t-29t=-101t$

$\begin{cases} x'=6\times(101t) \\ y'=8\times(101t) \\ z'=-(101t) \end{cases}$ pour $t'=101t$ **le point M' appartient à la droite $\Delta$.**