Exercice 1 — 6 points

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par n : $u_n = \int_0^n e^{-x^2}\,dx$

On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n.

1.a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

1.b. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $-x^2 \leqslant -2x+1$, puis $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$.

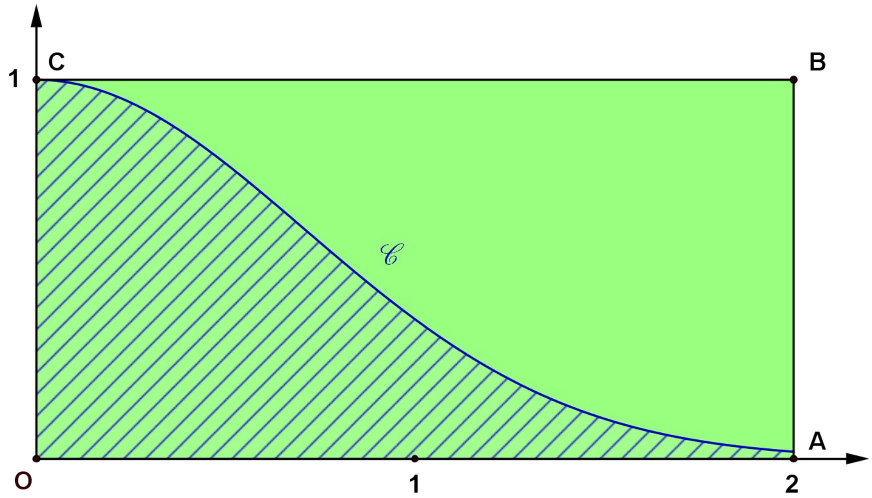
En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n < \frac{e}{2}$.

1.c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

2. Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur approchée de u_2.

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0;2] par $f(x)=e^{-x^2}$, et le rectangle OABC où A(2;0), B(2;1) et C(0;1).

On a hachuré le domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x=2.



On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un point M au hasard à l'intérieur du rectangle OABC.
On admet que la probabilité p que ce point appartienne au domaine est :

$$p=\frac{\text{aire de } \mathscr{D}}{\text{aire de OABC}}$$

2.a. Justifier que $u_2=2p$

2.b. On considère l'algorithme suivant :

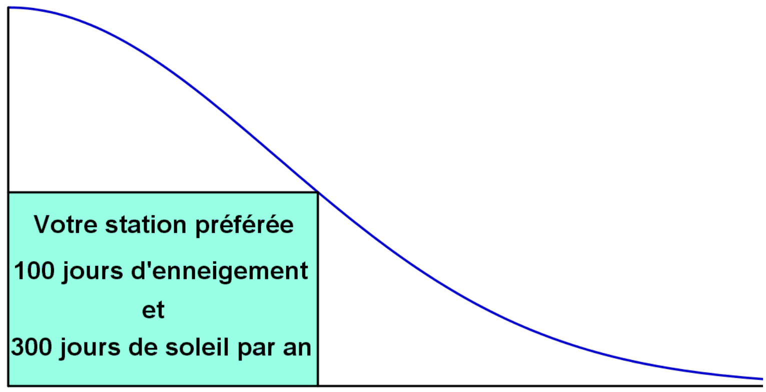
Variables : N, C, k nombres entiers ; X,Y, F nombres réels
Entrée : Saisir N
Initialisation : C prend la valeur 0
Traitement :
Pour k variant de 1 à N
  X prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 2
  Y prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et1
  Si $Y \leqslant e^{-X^2}$ alors
    C prend la valeur C+1
  Fin Si
Fin Pour
Afficher C
F prend la valeur C/N
Afficher F

- Que permet de tester la condition de la ligne L8 concernant la position du point M(X;Y) ?
- Interpréter la valeur F affichée par cet algorithme.
- Que peut-on conjecturer sur la valeur de F lorsque N devient très grand ?

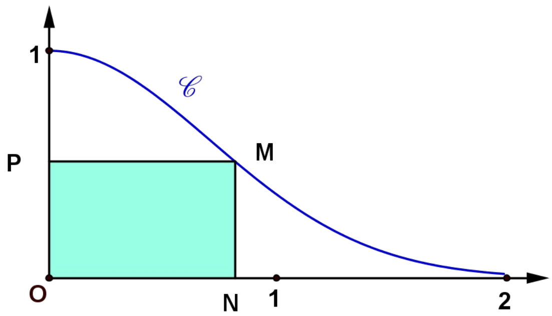
2.c. En faisant fonctionner cet algorithme pour $N=10^6$, on obtient C= 441 138.
On admet dans ce cas que la valeur F affichée par l'algorithme est une valeur approchée de la probabilité p à 10^{-3} près.
En déduire une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Le panneau, modélisé par le domaine $\mathcal{D}$ défini dans la partie A, est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre. Il est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
L'unité choisie est le mètre.



Pour x nombre réel appartenant à l'intervalle [0;2], on note :
- M le point de la courbe $\mathcal{C}$ de coordonnées $(x;e^{-x^2})$,
- N le point de coordonnées (x;0),
- P le point de coordonnées $(0;e^{-x^2})$,
- A(x) l'aire du rectangle ONMP.

1. Justifiez que pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;2], on a $A(x)=x\,e^{-x^2}$.

2. Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathcal{C}$ pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale.

3. Le rectangle ONMP d'aire maximale obtenu à la question 2, doit être en bleu, et le reste du panneau en blanc. Déterminer en m^2 et à 10^{-2} près, la mesure de la surface à peindre en bleu et celle de la surface à peindre en blanc.

CORRECTION

Partie A

Pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^n e^{-x^2}\,dx$

1.a. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n = \int_0^{n+1} e^{-x^2}\,dx - \int_0^{n} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{n+1} e^{-x^2}\,dx + \int_n^{0} e^{-x^2}\,dx = \int_n^{n+1} e^{-x^2}\,dx$$

La fonction g qui à x associe $g(x)=e^{-x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout intervalle [n;n+1] :

$\int_n^{n+1} e^{-x^2}\,dx \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale).

Conséquence

$u_{n+1}-u_n \geq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$

La suite (u_n) est croissante.

1.b. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :

$0\leqslant(x-1)^2 \Leftrightarrow 0\leqslant x^2-2x+1 \Leftrightarrow -x^2\leqslant -2x+1$

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=e^{-2x+1}$, et soit $H(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x+1}$

H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

$$\int_0^n e^{-2x+1}\,dx=H(n)-H(0)=-\frac{1}{2}e^{-2n+1}+\frac{1}{2}e$$

Conséquence

$$\int_0^n e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^n e^{-2x+1}\,dx=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e^{-2n+1} < \frac{e}{2}$$

donc $u_n < \frac{e}{2}$.

1.c. (u_n) **est une suite croissante et majorée donc convergente.**

2.a. L'aire du rectangle OABC est égale à $2\times1=2$ (en unité d'aire)

f est positive sur [0;2] donc : $u_2 = \int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ est l'aire de $\mathscr{D}$ (en unité d'aire).

On admet que $p=\frac{u_2}{2}$ donc u_2 **=2p.**

2.b. $0\leqslant X\leqslant 2$ et $0\leqslant Y\leqslant 1$ donc M(X;Y) est un point du rectangle (OABC).

L8 Si $Y\leqslant e^{-X^2}$ alors le point M(X;Y) appartient au domaine $\mathscr{D}$.

. Pour N donné, $F=\frac{C}{N}$ est la proportion de points M situés $\mathscr{D}$ pour un échantillon de taille N.

. Lorsque N devient très grand F est une valeur approchée (« assez précise ») de p.

2.c. $N=10^6$ C= 441 138 F=0,441138

0,441 est une valeur approchée de p à 10^{-3} près.

$u_2=2p=0,882$

0,88 est une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près.

Partie B

1. $ON=x \geqslant 0$ $OP=e^{-x^2}>0$

$A(x)=ON\times OP=xe^{-x^2}$ (m^2)

2. A est une fonction dérivable sur [0;2].

$(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{-x^2})'=-2xe^{-x^2}$

On dérive un produit

$A'(x)=1\times e^{-x^2}+x\times(-2xe^{-x^2})=(1-2x^2)e^{-x^2}$.

Le signe de $A'(x)$ sur [0;2] est le signe du trinôme $T(x)=1-2x^2=(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)$.

$1-\sqrt{2}x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $0<\frac{\sqrt{2}}{2}<2$.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		2
A'(x)		+	0	−	
A(x)	0	↗	M	↘	$2e^{-4}$

Le signe de $A'(x)$ sur [0;2] est le signe de $1-\sqrt{2}x$ $A(0)=0$ $A(2)=2e^{-4}$ $M=A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

<u>Conclusion</u>

L'aire du rectangle ONMP est maximale pour le point M de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};e^{\frac{-1}{2}}\right)$ **.**

3. L'unité d'aire est le mètre carré.

L'aire de $\mathscr{D}$ est $0{,}88\,m^2$ (à 10^{-2} près).

L'aire du rectangle ONMP à peindre en bleu est $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}=$ **0,43** m^2 (à 10^{-2} près).

L'aire de la surface à peindre en blanc est 0,88-0,43= **0,45** m^2 (à 10^{-2} près).