Exercice 2 4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe : $z'=-z^2-2z$.
Le point M' est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$-z^2+2z-2=0$
En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M et M' son image d'affixe z'.
On note N le point d'affixe $z_N=z^2$.
Montrer que M est lemilieu du segment [NM'].

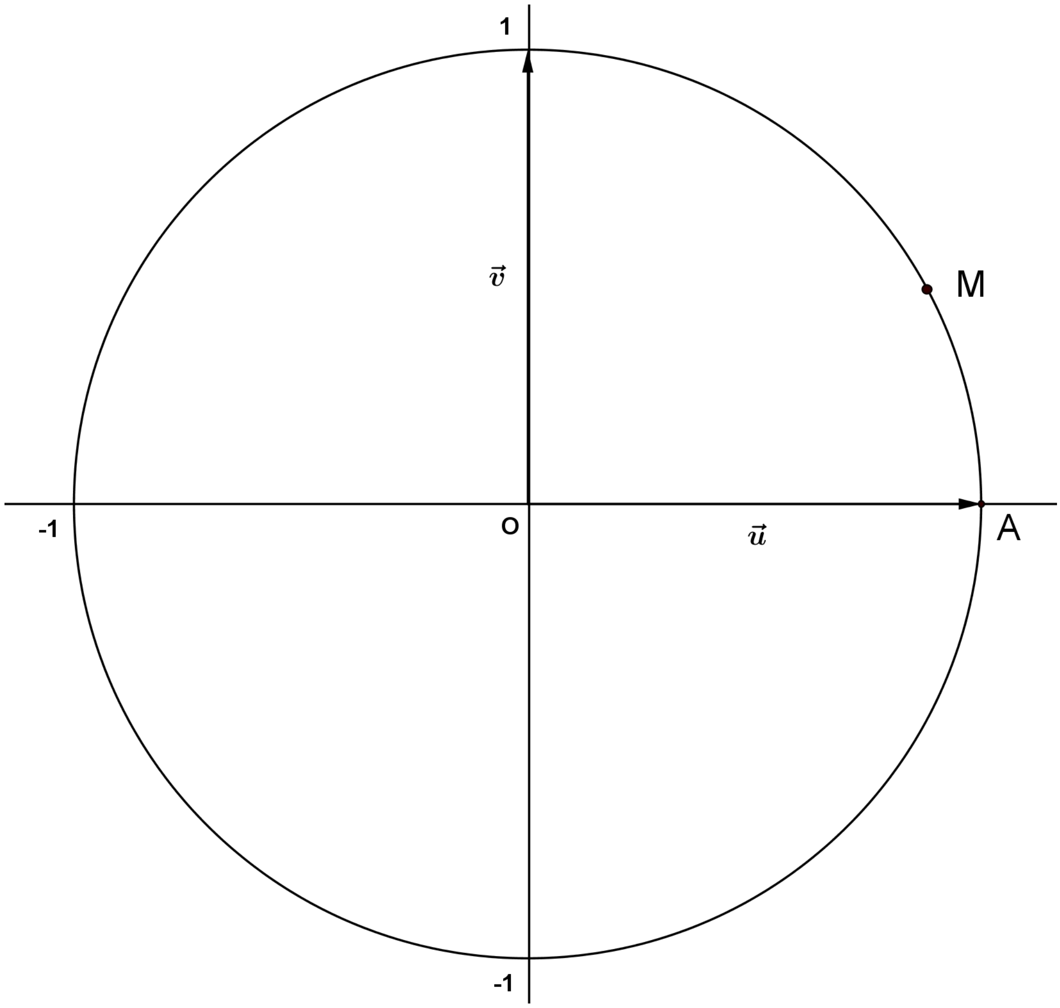
3. Dans cette, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
On note θ un argument de z.

3.a. Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.

3.b. Sur la figure donnée en annexe, on a représenté un point M sur le cercle $\mathscr{C}$.
Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).

3.c. Soit A le point d'affixe 1.
Quelle est la nature du triangle AMM' ?
La page contenant l'annexe est à rendre avec la copie.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE



CORRECTION

1. $-z^2+2z-2=0$

$\Delta=2^2-4\times(-1)\times(-2)=4-8=-4=4i^2=(2i)^2$

$z_1=\frac{-2-2i}{-2}=1+i$ et $z_2=\frac{-2+2i}{-2}=1-i$

S={1-i;1+i}

$-z^2+2z-2=0 \Leftrightarrow 2=-z^2+2z$

Conséquence

Les points d'affixe 1-i et 1+i ont pour image le point d'affixe 2.

2. $M(z)$ $N(z^2)$ $M'(-z^2+2z)$

$\frac{z_N+z_{M'}}{2}=\frac{z^2-z^2+2z}{2}=z$

donc **M est le milieu du segment [NM'].**

3.a. M(z) appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 $|z|=1$.

$N(z^2)$ $|z^2|=|z|^2=1$ donc $|z_N|=1$

$\arg(z)=\theta\ (2\pi)$

$z^2=z\times z$

$\arg(z^2)=\arg(z)+\arg(z)\ (2\pi)$

$\arg(z^2)=2\arg(z)\ (2\pi)$

$\arg(z^2)=2\theta\ (2\pi)$

$\arg(z_N)=2\theta\ (2\pi)$

3.b. $|z_N|=1$ donc N appartient an cercle $\mathscr{C}$.

$\arg(z)=\theta\ (2\pi)$ $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})=\theta\ (2\pi)$

$\arg(z_N)=2\theta\ (2\pi)$ $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{ON})=2\theta\ (2\pi)$ donc $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})=\theta\ (2\pi)$

- On doit construire l'angle $\widehat{MON}$ égal à l'angle $\widehat{AOM}$, il suffit de reporter au compas l'écartement MA et obtenir l'écartement MN sur le cercle $\mathscr{C}$.
  Il suffit de construire le cercle Γ de centre M et passant par A.
  Les deux points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ sont A et N.
- Remarque
  Le triangle AON est isocèle et (OM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AON}$, c'est la hauteur et la médiane.
  On obtient que N est le symétrique de A par rapport à (OM).
  On peut connstruire la droite Δ passant par A et perpendiculaire à (OM) et N et l'un des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ .
- Pour construire M', on utilise le résultat : M est le milieu de [NM'] donc M' est le symétrique de N par rapport à M ou M' est le point diamétralement opposé de N sur le cercle Γ donc M' est le deuxième point d'intersection de (MN) et Γ .

3.c. A et M' sont deux points du cercle Γ de centre M donc MA=MM' est **le triangle AMM' est isocèle de sommet principal M.**

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE