Exercice 3 5 points

Tous les résultats demandés seront arrondis au millième

1. Une étude effectuée sur une population d'hommes âgés de 35 à 40 ans a montré que le taux de cholestérol total dans le sang, exprimé en grammes par litre, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi nrmale d'espérance $\mu=1{,}84$ et d'écart-type $\sigma=0{,}4$.

1.a. Déterminer selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol compris entre 1,04 g/L et 2,64g/L.

1.b. Déterminer selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un un taux de cholestérol supérieur à 1,2 g/L.

2. Afin de tester l'efficacité d'un médicament contre le cholestérol, des patients nécessitant d'être traités ont accepté de participé à un essai clinique organisé par un laboratoire.
Dans cet essai, 60 % des patients ont pris le médicament pendant un mois, les autres ayant pris un placebo (comprimé neutre).
On étudie la baisse du taux de cholestérol après expérimentation.
On constate une baisse pour 90 % des patients ayant pris le médicament.
On constate aucune baisse pour 90 % des personnes ayant pris le placebo.
On choisi au hasard un patient ayant participé à l'expérimentation et on note :

. M l'événement « le patient a pris le médicament » ;
. B l'événement « le taux de cholestérol a baissé chez le patient ».

2.a. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2.b. Calculer la probabilité de l'événement B.

2.c. Calculer la probabilité qu'un patient ait pris le médicament sachant que son taux de cholestérol a baissé.

3. Le laboratoire qui produit ce médicament annonce que 30 % des patients qui l'utilisent présentent des effets secondaires.
Afin de tester cette hypothèse, un cardiologue sélectionne de manière aléatoire 100 patients traités avec ce médicament.

3.a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de patients suivant ce traitement et présentant des effets secondaires.

3.b. L'étude réalisé auprès de 100 patients a dénombré 37 personnes présentant des effets secondaires.
Que peut-on conclure ?

3.c. Pour estimer la proportion d'utilisateurs de ce médicament présentant des effets secondaires, un organisme indépendant réalise une étude basée sur un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %.
Cette étude aboutit à une fréquence observée de 37 % de patients présentant des effets secondaires, et à un intervalle de confiance qui ne contient pas la fréquence de 30 %.
Quel est l'effectif minimal de l'échantillon de cette étude ?

CORRECTION

1. La variable aléatoire T suit la loi normale d'espérance $\mu=1{,}84$ et d'écart-type $\sigma=0{,}4$.

1.a. En utilisant la calculatrice :

$P(1{,}04\leqslant T\leqslant 2{,}64)=$ **0,954.**

Remarque

$P(\mu-2\sigma\leqslant T\leqslant\mu+2\sigma)=$ **0,954.**

or $1{,}84-2\times0{,}4=1{,}04$ et $1{,}84+2\times0{,}4=2{,}64$

1.b. $P(1{,}2\leqslant T)=$ **0,977.**

2. 60 % des patients ont pris le médicament pendant un mois, les autres ayant pris un placebo.

Donc $P(M)=0{,}6$ et $P(\bar{M})=1-0{,}6=0{,}4$.

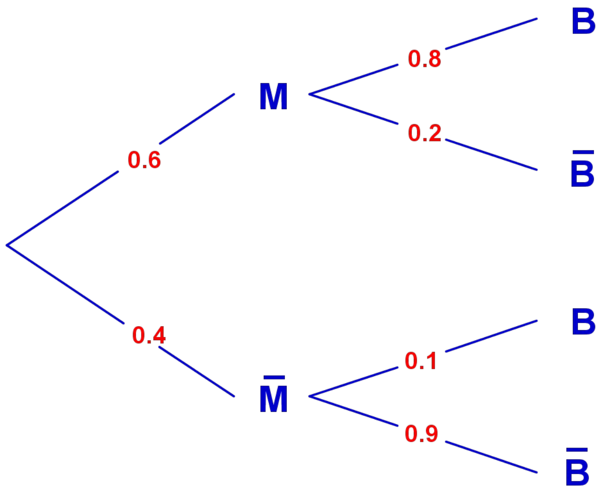
. On constate une baisse de ce taux chez 80 % des patients ayant pris le médicament.

Donc $P_M(B)=0{,}8$ et $P_M(\bar{B})=1-0{,}8=0{,}2$.

. On constate aucune baisse pour 90 % des personnes ayant pris le placebo.

Donc $P_{\bar{M}}(\bar{B})=0{,}9$ et $P_{\bar{M}}(B)=1-0{,}9=0{,}1$.

. On obtient l'arbre pondéré :



2.b. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales.

$P(B)=P(M)\times P_M(B)+P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(B)=0{,}6\times0{,}8+0{,}4\times0{,}1=0{,}48+0{,}04=$ **0,52.**

2.c. On nous demande de calculer $P_B(M)$

$P_B(M)=\dfrac{P(B\cap M)}{P(B)}=\dfrac{0{,}48}{0{,}52}=$ **0,923.**

3. a. $p=0{,}3$ $n=100\geqslant30$ $np=30\geqslant5$ $n(1-p)=70\geqslant0$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de patients suivant le traitement et présentant des effets secondaires est :

$$I=\left[p-1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};p+1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]=\left[0{,}3+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}3\times0{,}7}{100}};0{,}3+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}3\times0{,}7}{100}}\right]$$

$1{,}96\times\sqrt{\dfrac{0{,}3\times0{,}7}{100}}=0{,}089$ à 10^{-3} près

I=[0,211;0,389].

3.b. La proportion trouvée dans cet échantillon de 100 patients, suivant ce traitement et présentant des effets secondaires est : $\dfrac{37}{100}=0{,}37$.

0,37 appartient à I.

Conclusion

Avec un risque d'erreur de 5 %, on ne peut pas remette en cause l'hypothèse du laboratoire.

3.c. La fréquence observée est : 0,37, un intervalle de confiance pour un échantillon de taille n est :

$$J=\left[0,37-\frac{1}{\sqrt{n}};0,37+\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

On veut que 0,3 n'appartienne pas à J donc :

$$0,3< 0,37-\frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}< 0,07 \Leftrightarrow \frac{1}{0,07}< \sqrt{n} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{0,07}\right)^2< n$$

$$\left(\frac{1}{0,07}\right)^2=204,08 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

n est unentier naturel.

<u>Conclusion</u>

La taille minimale de l'échantillon est : 205.