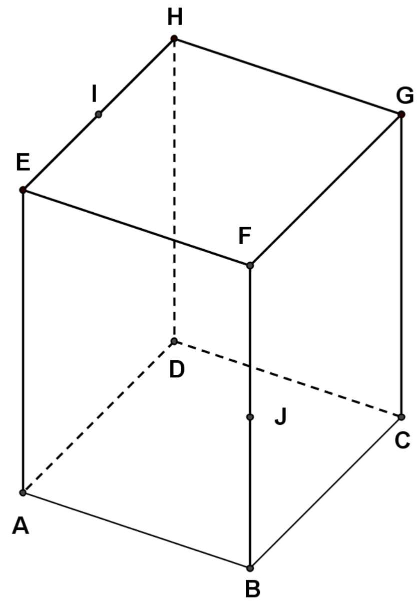
Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.
On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [FB].



On munit l'espace durepère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées despoints I et J.

2.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

2.b. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

2.c. On note K le milieu du segment [HJ], le point K appartient-il au plan (BGI) ?

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle (BGI).

3.a. En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre FEIG est égal à $\frac{1}{6}$.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3} B \times h$ *où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.*

3.b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI)

3.c. La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'.

Montrer que le point F' a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; \frac{5}{9}\right)$.

3.d. Calculer la longueur FF'.
En déduire l'aire du triangle BGI.

CORRECTION

1. $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.

On donne les coordonnées des sommets du cube.

$A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $C(1;1;0)$ $D(0;1;0)$ $E(0;0;1)$ $F(1;0;1)$ $G(1;1;1)$ $H(0;1;1)$

I est le milieu de [EH]

$I\left(\frac{0+0}{2};\frac{0+1}{2};\frac{1+1}{2}\right)$ $I\left(0;\frac{1}{2};1\right)$

J est le milieu de [FB]

$J\left(\frac{1+1}{2};\frac{0+0}{2};\frac{1+0}{2}\right)$ $J\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$

2.a. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BGI) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI) par exemples $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{GI}$.

$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix}-1\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BI}.\vec{n}=(-1)\times1+\left(\frac{1}{2}\right)\times(-2)+1\times2=-1-1+2=0$

$\overrightarrow{GI}.\vec{n}=(-1)\times1+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)+0\times2=-1+1=0$

donc $\vec{n}$ **est un vecteur normal au plan (BGI).**

2.b. Le point M(x;y;z) appartient au plan (BGI) si et seulement si $\overrightarrow{BM}.\vec{n}=0$

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\ y-0\\ z-0\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BM}.\vec{n}=(x-1)\times1+y\times(-2)+z\times2=x-2y+2z-1$

Une équation cartésienne du plan (BGI) est : x-2y+2z-1=0.

2.c. K est le milieu de [HJ]

$K\left(\frac{1+0}{2};\frac{1+0}{2};\frac{0,5+1}{2}\right)$ $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$

Les coordonnées du point K vérifient-elles l'équation du pla (BGI) ?

$\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{4}-1=\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}-1=0$

donc **le point K appartient au plan (BGI).**

3.a. On choisit dans le tétraèdre FBIG pour base le triangle FGI (contenue dans la face EFGH du cube) et pour hauteur BF (arête du cube).

On peut calculer l'aire du triangle FGI en choisissant pour base FG=1 et la hauteur du triangle est aussi égale à 1 aussi.

L'aire du triangle FGI est : $\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$.

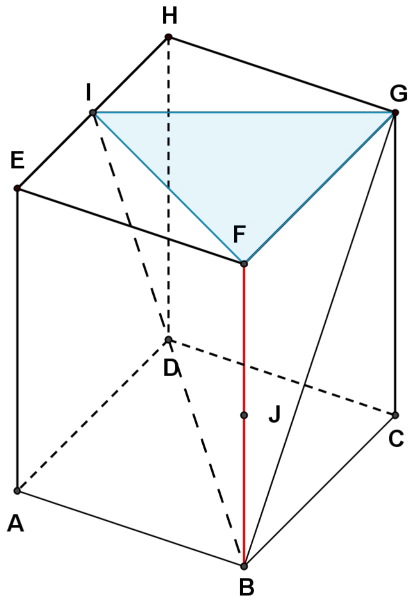
On peut aussi enlever, à l'aire du carré EFGH, les aires des deux triangles rectangles EFI et GHI d'aire :

$\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

L'aire du triangle FGI est : $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Le volume du tétraèdre FBIG est égal à : $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}$ **.**

On joint une figure non demandée.



3.b. Δ est la droite passant par $F(1;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

On obtient pour représentation paramétrique de Δ :

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t \qquad t \text{ décrit } \mathbb{R} \\ z = 2t+1 \end{cases}$$

3.c. Pour déterminer l'intersection du plan (BGI) et la droite Δ, on résout le système :

$$\begin{cases} x-2y+2z-1 = 0 \\ x = t+1 \\ y = -2t \\ z = 2t+1 \end{cases}$$

On obtient :

$$t+1-2(-2t)+2(2t+1)-1=0 \Leftrightarrow t+1+4t+4t+2-1=0 \Leftrightarrow 9t=-2 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{9}$$

$$x=t+1=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

$$y=-2t=-2\times\left(-\frac{2}{9}\right)=\frac{4}{9}$$

$$z=2t+1=2\times\left(-\frac{2}{9}\right)+1=\frac{5}{9}$$

Le plan (BGI) et la droite Δ sont sécant en F' $\left(\frac{7}{9};\frac{4}{9};\frac{5}{9}\right)$.

3.d. $FF'^2=\left(1-\frac{7}{9}\right)^2+\left(0-\frac{4}{9}\right)^2+\left(1-\frac{5}{9}\right)^2=\frac{4}{81}+\frac{16}{81}+\frac{16}{81}=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}$

$FF'=\frac{2}{3}$

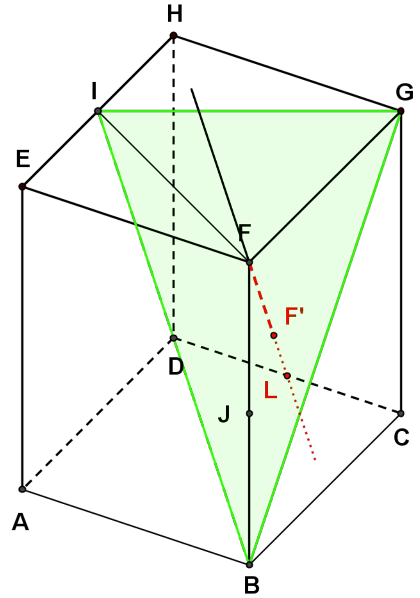
Si on pose X l'aire du triangle BGI alors le volume de tétaèdre FBIG est :

$V=\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\times X\times\frac{2}{3}$

$\frac{1}{6}=\frac{2}{9}X \quad \Leftrightarrow \quad X=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

L'aire du triangle BGI est $\frac{3}{4}$.

On joint une figure non demandée.



<u>Remarque</u>

On peut vérifier que la droite Δ passe par le milieu L de [DC], $L\left(\frac{1}{2};1;0\right)$.

On remplace t par $-\frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de Δ .