Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points : $A(1;5;-2)$ $B(7;-1;3)$ et $C(-2;7;-2)$ et on note P le plan (ABC).
On cherche une équation cartésienne du plan P de la forme $a\,x+b\,y+c\,z=73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X vérifie la relation : $MX=73\,Y$, où M esla matrice :

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Soit N la matrice : $N=\begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'une calculatrice, on acalculé les produits $M\times N$ et $N\times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

Pour MxN

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

Pour NxM

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

À l'aide de ces informations, justifier que la matrice M est inversible et exprimer sa matrice inverse M^{-1} en fonctionn de la matrice N.

3. Montrer alors que : $X=NY$.
En déduire que le plan P admet pour équation cartésienne : $10\,x+15\,y+6\,z=73$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points de coordonnées entières du plan P ayant pour équation cartésienne : $10\,x+15\,y+6\,z=73$.

1. Soit $M(x;y;z)$ un point appartenant au plan P et au plan d'éqtauation $z=3$.
On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

1.a. Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation :
(E) : $2\,x+3\,y=11$.

1.b. Justifier que le couple (7 ;-1) est une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.

1.c. Montrer qu'il existe exactement deux points appartenant au plan P et au plan d'équation z=3 et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Déterminer les coordonnées de ces deux points.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $M(x;y;z)$ du plan P dont les coordonnées sont des entiers naturels.
Soient x, y et z des entiers naturels tels que 10x+15y+6z=73.

2.a. Montrer que y est impair.

2.b. Montrer que $x \equiv 1 \ (3)$. On admet que $z \equiv 3 \ (5)$.

2.c. On pose alors : x=1+3p, y=1+2q et z=3+5r où p,q etr sont des entiers naturels.
Montrer que le point M(x;y;z) appartient au plan P si et seulement si p+q+r = 1.

2.d. En déduire qu'il existe exactement trois points du plan P dont les coordonnées sont des entiers naturels.
Déterminer les coordonnées de ces points.

CORRECTION

Partie A

1. On admet que les points A(1;5 ;-2) ; B(7 ;-1;3) et C(-2;7 ;-2) ne sont pas alignés et on note P=(ABC).
On cherche une équation cartésienne du plan P de la forme : $ax+by+cz=73$.
A appartient au plan P si et seulement si $a\times 1+b\times 5+c\times(-2)=73 \Leftrightarrow a+5b-2c=73$.
B appartient au plan P si et seulement si $a\times 7+b\times(-1)+c\times 3=73 \Leftrightarrow 7a-b+3c=73$.
C appartient au plan P si et seulement si $a\times(-2)+b\times 7+c\times(-2)=73 \Leftrightarrow -2a+7b-2c=73$.
On obtient le système :

$$\begin{cases} a+5b-2c=73 \\ 7a-b+3c=73 \\ -2a+7b-2c=73 \end{cases} .$$

Or $MX=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+5b-2c \\ 7a-b+3c \\ -2a+7b-2c \end{pmatrix}$.

$$MX=73Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+5b-2c \\ 7a-b+3c \\ -2a+7b-2c \end{pmatrix}=73\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 73 \\ 73 \\ 73 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+5b-2c=73 \\ 7a-b+3c=73 \\ -2a+7b-2c=73 \end{cases} .$$

<u>Conclusion</u>
Une équation cartésienne du plan P est de la forme ax+by+cz=73 si et seulement si MX=73Y.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $M\times N=N\times M=73I \Leftrightarrow \frac{1}{73}(M\times N)=\frac{1}{73}(N\times M)=I \Leftrightarrow M\times\left(\frac{1}{73}N\right)=\left(\frac{1}{73}N\right)\times M=I$.

<u>Conclusion</u>
M est une matrice inversible est $M^{-1}=\frac{1}{73}N$.

3. $MX=73Y \Leftrightarrow M^{-1}\times(MX)=M^{-1}\times(73Y)=(M^{-1}\times M)X=73(M^{-1}Y)=IX=73\left(\frac{1}{73}N\right)Y$

$\Leftrightarrow X=NY$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19+4-13 \\ -8+6+17 \\ -47+17+36 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=15 \\ c=6 \end{cases}$$

<u>Conclusion</u>
Une équation cartésienne de P=(ABC) est : 10x+15y+6z = 73.

Partie B

1.a. $\begin{cases} 10x+15y+6z=73 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+15y+18=73 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+15y=55 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=11 \\ z=3 \end{cases}$.

<u>Conclusion</u>
Les entiers x et y sont solutions de l'équation (E) : 2x+3y = 11.

1.b. $2\times 7+3\times(-1)=14-3=11$.
Donc le couple (2 ;-1) est une solution particulière de l'équation (E).
(E) : $2x+3y=11 \Leftrightarrow 2x+3y=2\times 7+3\times(-1) \Leftrightarrow 2x-2\times 7=-3y-1\times 3$
$\Leftrightarrow 2(x-7)=3(-y-1)$.

2 divise 3(-y-1) et 2 est premier avec 3 donc le théorème de Gauss nous permet d'affirmer que 2 divise (-y-1) donc il existe un entier relatif k tel que $(y-1)=2k \Leftrightarrow y=-2k-1$.
Pour tout entier relatif k tel que $(-y-1)=2k \Leftrightarrow y=-2k-1$ alors :
$2(x-7)=3(-y-1) \Leftrightarrow 2(x-7)=3\times 2k \Leftrightarrow x-7=3k \Leftrightarrow x=3k+7$.
L'ensemble des solutions de l'équation (E) , dans l'ensemble des couples d'entiers relatifs, est l'ensemble des couples (3k+7 ;-2k-1) où k est un entier relatif.

1.c. Le couple solution est un couple d'entiers naturels si et seulement si $3k+7\geqslant 0$ et $-2k-1\geqslant 0$.
Soit $k \geqslant -\frac{7}{3}$ et $k\leqslant -\frac{1}{2}$, il existe deux valeurs entières de k : $k=-2$ et $k=-1$.
On obtient pour k= -2 : (1;3) et pour k= -1 : (4;1).
Conclusion
Il existe deux points, appartenant au plan P et au plan d'équation z=3, dont les coordonnées sont des entiers naturels , ces points ont pour coordonnées : (1;3;3) et (4;1;3).

2.a. $10=2\times 5$ donc $10\equiv 0\ (2)$
$6=2\times 3$ donc $6\equiv 0\ (2)$
$15=2\times 7+1$ donc $15\equiv 1\ (2)$
$10x+15y+6z\equiv 1\times y\ (2)$ soit $10x+15y+6z\equiv y\ (2)$
$73=2\times 36+1$ donc $73\equiv 1\ (2)$
Si 10x+15y+6z=73 alors $y\equiv 1\ (2)$
Le reste de la division euclidienne de y par 2 est 1 donc **y est un nomre impair.**

2.b. $10=3\times 3+1$ donc $10\equiv 1\ (3)$
$15=3\times 5$ donc $15\equiv 0\ (3)$
$6=2\times 3$ donc $6\equiv 0\ (3)$
$73=3\times 24+1$ donc $73\equiv 1\ (3)$
Si 10x+15y+6z=73 alors $x\equiv 1\ (3)$
On admet que $z\equiv 3\ (5)$

2.c. $x=1+3p\,;\ y=1+2q\,;\ z=3+5r$ p, q et r sont des entiers naturels.
$10x+15y+6z=73 \Leftrightarrow 10(1+3p)+15(1+2q)+6(3+5r)=73 \Leftrightarrow 10+30p+15+30q+18+30r=73$
$\Leftrightarrow 30p+30q+30r=73-43=30 \Leftrightarrow$ **p+q+r = 1**

3.d. p, q et r sont des entiers naturels donc ils existent trois et trois seulement triplets (p;q;r) tels que p+q+r = 1 (1;0;0) ; (0;1;0) et (0;0;1).
Pour le triplet : (1;0;0), on obtient x=4 ; y=1 et z=3 (4;1;3).
Pour le triplet : (0;1;0), on obtient x=1, y=3 et z=3 (1;3;3).
Pour le triplet : (0;0;1), on obtient x=1, y=1 et z=8 (1;1;8).
Conclusion
Il existe exactement trois points du plan P tels que leurs coordonnées sont des entiers naturels : les trois points de coordonnées (1;3;3) ; (4;1;3) et (1;1;8).