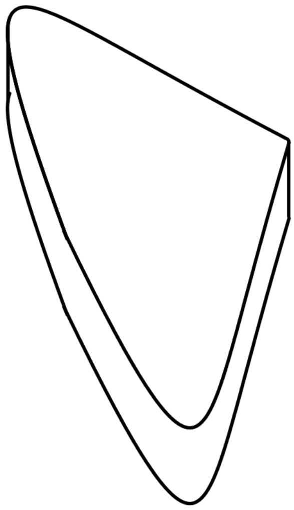
Exercice 1 5 points

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets en forme de goutte d'eau.

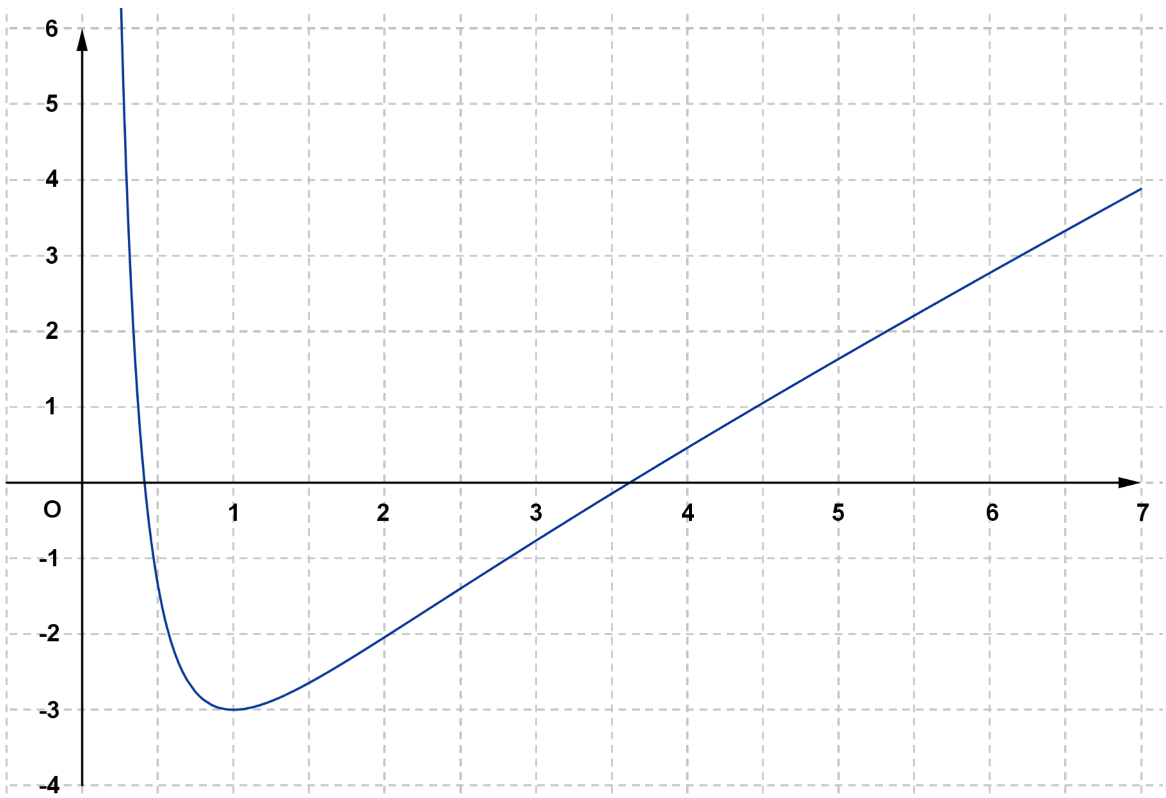


Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

Partie A : modélisation par une fonction

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2-3\ln(x)}{x}$.

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\varphi(x)=x^2-1+3\ln(x)$
1.a. Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.
1.b. Étudier les variations de φ sur $]0;+\infty[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2.a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2.b. Montrer que sur $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2}$
En déduire le tableau de variation de f.
2.c. Prouver que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α sur]0;1].
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
On admettra que l'équation f(x)=0 a également une unique solution β sur $[1;+\infty[$ avec $\beta=3{,}61$ à 10^{-2} près.
2.d. Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :
$F(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-2\ln(x)-\frac{3}{2}(\ln(x))^2$
Montrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Partie B : résolution du problème

Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à 10^{-2} près de α et β de la partie A.

Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative C de la fonction f restreinte à l'intervalle $[\alpha;\beta]$ ainsi que son symétrique C' par rapport à l'axe des abscisses.
Les deux courbes C et C' délimitent la face supérieure du palet. Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de 0,5 cm.
Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité serait-elle respectée ?

CORRECTION

Partie A : modélisation par une fonction

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $\varphi(x)=x^2-1+3\ln(x)$

1.a. $\varphi(1)=1$

x appartient à $]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)=-1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=-\infty$

1.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ $\varphi'(x)=2x+\frac{3}{x}>0$

φ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\varphi(1)=0$

donc si $0<x<1$ alors $\varphi(x)<0$ et si $1<x$ alors $0<\varphi(x)$

On donne le signe de $\varphi(x)$ sous la forme d'un tableau

x	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$	||	$-$	0	$+$	

2.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{x^2-2x-2-3\ln(x)}{x}$

. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $f(x)=(x^2-2x-2-3\ln(x))\times\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x-2)=-2$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x-2-3\ln(x))=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$

<u>Conséquence</u>

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$

. $f(x)=x-2-\frac{2}{x}-\frac{3\ln(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln(x)}{x}=0$

<u>Conséquence</u>

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2.b. $u(x)=x^2-2x-2-3\ln(x)$ $u'(x)=2x-2-\frac{3}{x}$

v(x)=x $v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{x\left(2x-2-\frac{3}{x}\right)-(x^2-2x-2-3\ln(x))}{x^2}=\frac{2x^2-2x-3-x^2+2x+2+3\ln(x)}{x^2}=\frac{x^2-1+3\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{\varphi(x)}{x^2}$$

Le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ est le signe de $\varphi(x)$

<u>Tableau de variation de f</u>

x	0		1		$+\infty$
f '(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	− 3	↗	$+\infty$

f(1)= -3

2.c. f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle sur l'intervalle]0;1], $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ et f(1)= -3, 0 appartient à lintervalle image : $[-3;+\infty[$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α appartenant à l'intervalle]0;1].
En considérant la représentation graphique et en en utilisant la calculatrice, on obtient :
f(0,4)= 0,27 à 10^{-2} près f(0,5)=-1,34 à 10^{-2} près donc 0,4 < α < 0,5
f(0,41)=0,05 à 10^{-2} près f(0,42)=-0,15 à 10^{-2} près donc 0,41 < α < 0,42
0,41 est une valaleur approchée de α à 10^{-2} près.

2.d. F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$ si seulement si $F'(x)=f(x)$

$$((\ln(x))^2)'=2(\ln(x))\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln(x)}{x}$$

$$F'(x)=\frac{1}{2}(2x)-2-2\times\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\times\left(\frac{2\ln(x)}{x}\right)=x-2-\frac{2}{x}-\frac{3\ln(x)}{x}$$

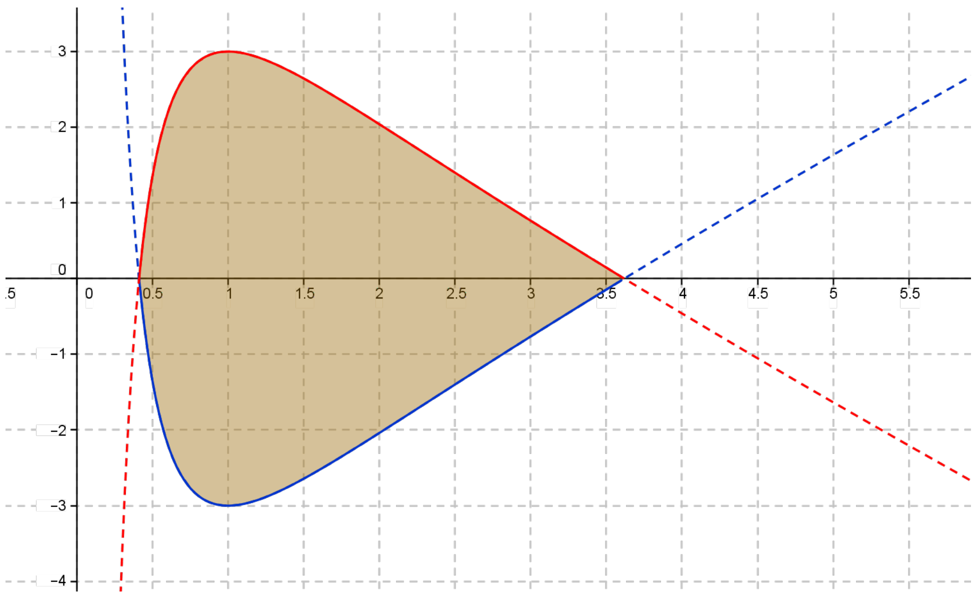
$$F'(x)=\frac{x^2-2x-2-3\ln(x)}{x}=f(x)$$

F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

Partie B : résolution du problème

On détermine le signe de f(x) en utilisant les variations de f.

x	0		α		β		$+\infty$
f(x)	‖	+	0	−	0	+	



C' est la courbe représentative de -f restreinte à $[\alpha;\beta]$, -f est positive sur $[\alpha;\beta]$ donc pour tout nombre réel de l'intervalle $[\alpha;\beta]$ $f(x) \geqslant f(x)$ donc l'aire de la face supérieure du palet est l'aire de la partie de plan comprise entre les courbes C et C' sur $[\alpha;\beta]$.
Cette aire est égale, en unité d 'aire, à :
$$\int_{\alpha}^{\beta}(-f(x)-f(x))\,dx = -2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -2(F(\beta)-F(\alpha)) = 2F(\alpha)-2F(\beta) \text{ U.A.}$$
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$2F(\alpha)=-0{,}29$ à 10^{-2} près $2F(\beta)=-11{,}49$ à 10^{-2} près.
$2F(\alpha)-2F(\beta)=11{,}20$.
Le repère est orthogonal et l'unité d'aire est l'aire d'un rectangle de dimensions : 1 cm et 2 cm soit $2\ \text{cm}^2$.
L'aire de la face supérieure du palet en cm^2 est : $2\times 11{,}20=22{,}40$.
Si l'épaisseur d'un palet est 0,5 cm alors le volume d'un palet est : $22{,}40\times 0{,}5=11{,}20\ \text{cm}^3$.
$80\times 11{,}20=896\ \text{cm}^3$ or 1 litre correspond à $1000\ \text{cm}^3$.

<u>Conclusion</u>

La contrainte de rentabilité est donc respectée.