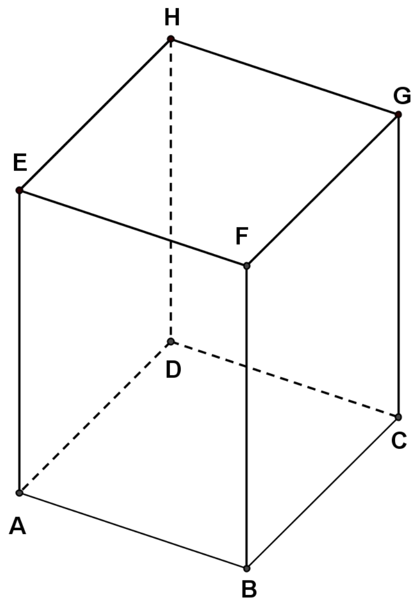
Exercice 2 4 points

On considère un cube ABCDEFGH.



1.a. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$.
1.b. En déduire que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=0$.
1.c. On admet que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}=0$.
Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. L'espace est muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
2.a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est : $x+y+z-1=0$.
2.b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).
2.c. On admet que l'aire , en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer le volume de la pyramide BDEG.

CORRECTION

1.a. ACGE est un rectangle donc $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$.

1.b. $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}).\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}$

ABCD est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires et les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$.

(AE) est une droite orthogonale au plan (ABD) donc (AE) est orthogonale à toute droite contenue dans le plan (ABD) donc (AE) est orthgonale à (BD) est les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}=0$.

Conséquence

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0+0=0$.

1.c. (BE) et (BD) sont deux droites sécantes du plan (BDE)

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=0$ donc (AG) est orthogonale à (BD)

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}=0$ donc (AG) est orthogonale à (AE).

Conséquence

(AG) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDE) donc **(AG) est orthogonale au plan (BDE).**

2. $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.

On écrit les coordonnées des sommets du cube :

A(0;0;0) B(1;0;0) C(1;1;0) D(0;1;0) E(0;0;1) F(1;0;1) G(1;1;1) H(0;1;1)

2.a. $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

M(x;y;z) appartient au plan (BDE) si et seulement si $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BM}=0$

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BM}=0 \Leftrightarrow 1\times(x-1)+1\times y+1\times z=0 \Leftrightarrow$ **x+y+z = 1**

2.b. On donne une représentation paramétrique de la droite (AG).

$(AG)\ \begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE), on résout le système : $\begin{cases}x+y+z-1=0\\x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$ on obtient : t+t+t-1=0 $\Leftrightarrow$ $t=\frac{1}{3}$

Conclusion

$K\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

2.c. On admet que l'aire du triangle BDE est égale à : $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(AG) est orthogonale au plan (BDE) donc KG est la hauteur de la pyramide BCEG issue de G.

G(1;1;1) $K\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ $KG^2=\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{12}{9}$ $FG=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

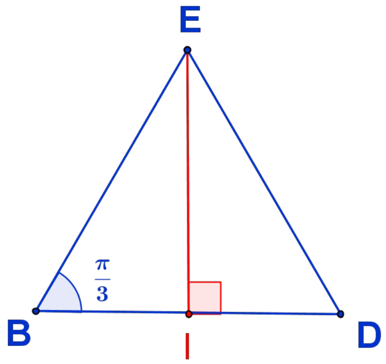
Le volume de la pyramide est égal au tiers du produit de la base par la hauteur.

$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}$ Unité de volume

Remarque

On peut facilement l'aire du triangle BDE.

Le triangle BDE est équalatéral la longueur d'un côté est à la longueur d'une diagonale d'une face du cube soit $\sqrt{2}$.



I est le milieu de [BD]

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\text{EI}}{\text{BE}}$ $\quad$ $\text{BE}=\sqrt{2}$ $\quad$ donc $\text{EI}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2}$

On note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle BDE $\mathscr{A}=\frac{1}{2}\times\text{BC}\times\text{EI}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

