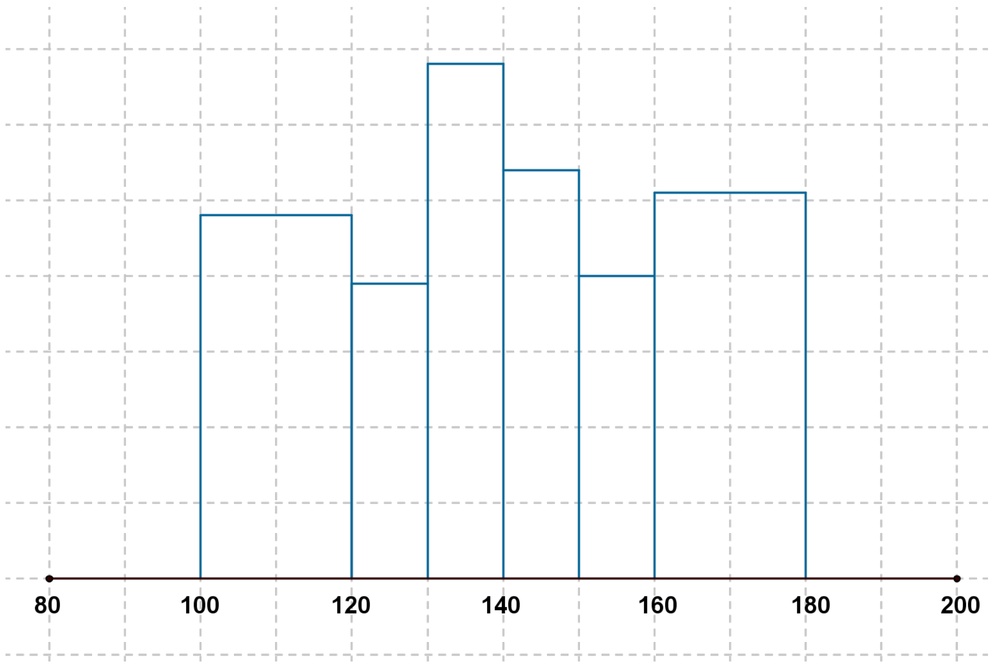
Exercice 3 — 3 points

Partie A

Un organisme de contrôle sanitaire s'intéresse au nombre de bactéries d'un certain type contenurs dans la crème fraîche. Pour cela, il effectue des analyses portant sur 10 000 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans l'ensemble de la production française.
Les résultats sont donnés et représentés dans l'histogramme ci-dessous :

Nombre de bactéries (en milliers)	[100;120[	[120;130[	[130;140[	[140;150[	[150;160[	[160;180[
Nombre de prélévements	1597	1284	2255	1808	1345	1711



À l'aide de la calculatrice, donner une estimation de la moyenne et de l'écart-type du nombre de bactéries par prélèvement.

Partie B

L'organisme décide alors de modéliser le nombre de bactéries étudiées (en milliers par ml) présentes dans la crème fraîche par une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres $\mu=140$ et $\sigma=19$.

1.a. Ce choix de modélisation est-il pertinent ? Argumenter.
1.b. On note $p=P(X\geqslant 160)$. Déterminer la valeur arrondie de p à 10^{-3}.

2. Lors de l'inspection d'une laiterie, l'organisme de contrôle sanitaire analyse un échantillon de 50 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans la production de cette laiterie ; 13 prélèvements contiennent plus de 160 milliers de bactéries.
2.a. L'organisme déclare qu'il y a un problème dans la production et qu'il peut l'affirmer en ayant une probabilité de 0,05 de se tromper.
Justifier sa déclaration.
2.b. Aurait-il pu l'affirmer avec une probabilité de 0,01 de se tromper.

CORRECTION

Partie A

Pour calculer une estimation de la moyenne pour chaque classe, on choisit le centre de classe.
Il y a 10000 prélèvements de 1 ml.

$$m=\frac{110\times 1597+125\times 1284+\ldots+170\times 1711}{10000}=\frac{1402100}{10000}=140,21$$

On prend pour estimation de la moyenne : **140** (milliers de bactéries)
Pour le calcul de la variance

$$V=\frac{(-30)^2\times 1597+(-15)^2\times 1284+\ldots+30^2\times 1711}{10000}=\frac{3670300}{10000}=367,03$$

$\sigma=\sqrt{V}$ $\sigma=$ **19,16**

Partie B

1.a. Si on modélise le nombre de bactéries (en milliers par ml) par une loi normale, il est pertinent de choisir pour moyenne $\mu=140$ et pour écart-type $\sigma=19$ qui correspondent aux valeurs déterminées dans la partie A.

1.b. En utilisant la calculatrice, on obtient $p=P(160\leqslant X)=$ **0,146** à 10^{-3} près.

2.a. $n=50\geqslant 30$ $p=0,146$ $np=7,3\geqslant 5$ $n(1-p)=42,7\geqslant 5$

On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de p.

$$I_{50}=\left[0,146-1,96\times\sqrt{\frac{0,146\times 0,854}{50}}\,;0,146\times\sqrt{\frac{0,146\times 0,854}{50}}\right]$$

$$\sqrt{\frac{0,146\times 0,854}{50}}=0,0499 \qquad 1,96\times\sqrt{\frac{0,146\times 0,854}{50}}=0,098 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

$$I_{50}=[0,146-0,098\,;0,146+0,098]=[0,048\,;0,244]$$

La proportion observée dans l'échantillon de 50 prélèvements est : $\frac{13}{50}=0,26$.

0,26 n'appartient pas à I_{50} donc l'organisme peut affirmer qu'il y a une anomalie dans la production en ayant une probabilité de 0,05 de se tromper.

2.b. On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 99 %.

$$J_{50}=\left[0,146-2,58\times\sqrt{\frac{0,146\times 0,854}{50}}\,;0,146-258\times\sqrt{\frac{0,146\times 0,854}{50}}\right]$$

$$2,58\times\sqrt{\frac{0,146\times 0,854}{50}}=0,129 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

$$J_{50}=[0,146-0,129\,;0,146+0,129]=[0,017\,;0,275]$$

0,26 appartient à J_{50} donc l'organisme ne peut pas affirmer qu'il y a une anomalie dans la production en ayant une probabilité de 0,01 de se tromper.