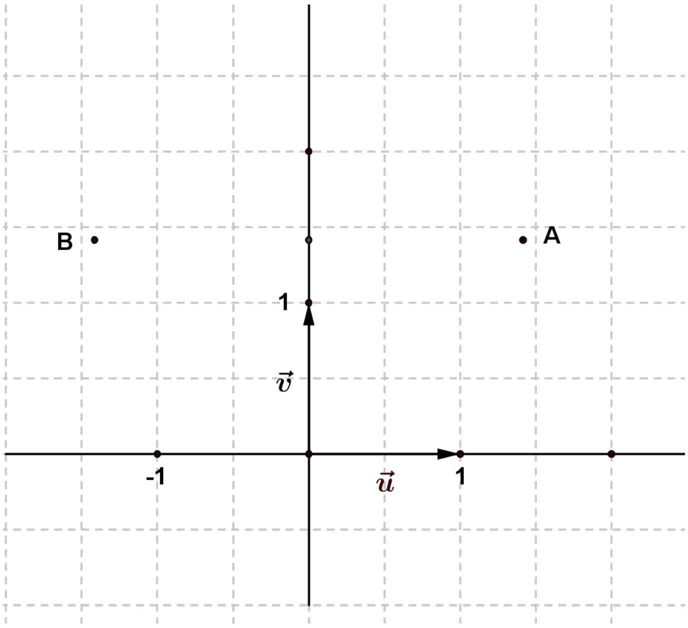
Exercice 4 3 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(0;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B=2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.



1. Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.

2. On considère l'équation : $(E): z^2-\sqrt{6}\,z+2=0$

Montrer qu'une solution de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

CORRECTION

1. $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $OA = |z_A| = 2$

$z_B = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ donc $OB = |z_B| = 2$

OA=OB le triangle OAB est isocèle.

$$z_A = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_B = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ $\quad \overrightarrow{AB}(-2\sqrt{2})$ $\quad AB = 2\sqrt{2}$

$OA^2 + OB^2 = 4 + 4 = 8$ $\quad AB^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$

La réciproque du théorème de Pythagore nous permet d'affirmer que le triangle OAB est rectangle en O.

Conclusion

Le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

2. (E) : $z^2 - \sqrt{6}z + 2 = 0$

$\Delta = (-\sqrt{6})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 6 - 8 = -2 < 0$.

L'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées.

$\Delta = (i\sqrt{2})^2$ $\quad z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ $\quad z_2 = \dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$

$M_1(z_1)$ $\quad M_2(z_2)$

Le cercle circonscrit au triangle OAB est le cercle de diamètre [AB].

Ce cercle est situé au dessus de l'axe des abscisses.

L'ordonnée du point M_1 étant négative, ce point ne peut pas appartenir au cercle circonscrit du triangle OAB

Le point M_2 appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM_2, est rectangle en M_2

$\overrightarrow{AM_2}(z_2 - z_A)$ $\quad z_2 - z_A = \dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2} - (\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{BM_2}(z_2 - z_B)$ $\quad z_2 - z_B = \dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{3}}{2} - (-\sqrt{2} + i\sqrt{5}) = \dfrac{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3} \times i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\overrightarrow{AM_2}.\overrightarrow{BM_2} = \frac{(\sqrt{6} - 2\sqrt{2})(\sqrt{6} + 2\sqrt{5})}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6 - 8}{4} + \frac{2}{4} = 0$$

Conclusion

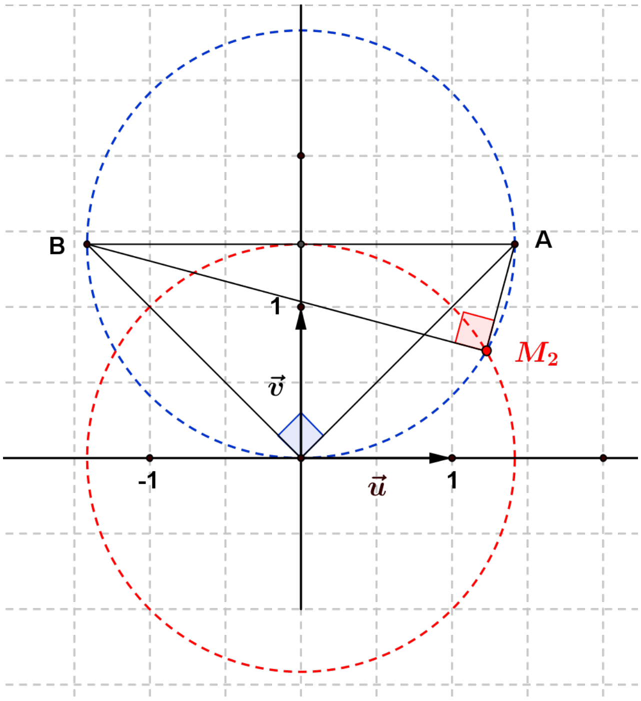
M_2 **appartient au cercle circonscrit du triangle OAB.**

Remarque

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

M_2 appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ (ce cercle passe par le centre circonscrit au triangle OAB.

On donne une figure complétée(non demandée).


B
A
1
M_2
$\vec{v}$
-1
$\vec{u}$
1