Exercice 5 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est aussi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en 2016+n. On a donc $v_0=12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population pra une suite (u_n) définie $u_0=12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=-\frac{1,1}{605}u_n^2+1,1\,u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=-\frac{1,1}{605}x^2+1,1\,x$.

1.a. Justifier que g est croissante sur [0;60].
1.b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation g(x) = x .

2. On remarquera que : $u_{n+1}=g(u_n)$.
2.a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1 . Interpréter.
2.b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant 55$.
2.c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2.d. En déduire la convergence de la suite (u_n) .
2.e. On admet que la limite l de la suite (u_n) vérifie $g(l)=l$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera 50 000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant :

Variables	n est un entier naturel
	u est un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant que . . . .
	u prend la valeur . . . . .
	n prend la valeur . . . . .
	Fin Tant que
Sortie	Afficher . . . .

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier n tel que $u_n\geqslant 50$.

CORRECTION

Partie A : un premier modèle

1. Pour tout entier naturel n, v_n représente le nombre d'individus (exprimé en milliers) en 2016+n et v_{n+1} est le nombre d'individus (exprimé en milliers) en 2016+n+1.
Or le biologiste estime que la population croît de 5 % par an donc :
$v_{n+1}=v_n+\frac{5}{100}v_n=v_n+0{,}05\,v_n=1{,}05\,v_n$.
Conclusion
(v_n) **est la suite géométrique de premier terme** $v_0=12$ **et de raison q=1,05.**
Pour tout entier naturel n : $v_n=v_0\times q^n=12\times 1{,}05^n$

2. $v_0=12>0$ et q=1,05 donc la suite (v_n) est croissante et $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$, donc le nombre d'individus de la population dépassera 60 000.
Ce modèle ne répond pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : un second modèle

1. Pour tout nombre réel x, $g(x)=-\frac{1{,}1}{605}x^2+1{,}1x$.

1.a. g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$g'(x)=-\frac{2{,}2}{605}x+1{,}1$

$g(x)>0 \Leftrightarrow 1{,}1>\frac{2{,}2}{605}x \Leftrightarrow 1{,}1\times\frac{605}{2{,}2}>x \Leftrightarrow 302{,}5>x$

Conséquence
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;60] $g'(x)>0$ **donc g est croissante sur [0;60].**

1.b. g(x) = x $\Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2+1{,}1x=x \Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2+0{,}1x=0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1{,}1}{605}x+0{,}1\right)=0$

$\Leftrightarrow$ (x = 0 ou $-\frac{1{,}1}{605}x+0{,}1=0$)

$-\frac{1{,}1}{605}x+0{,}1=0 \Leftrightarrow x=0{,}1\times\frac{605}{1{,}1}=55$

Conclusion
L'équation g(x) = x admet deux solutions : 0 et 55.

2.a. $u_1=g(u_0)=g(12)=-\frac{1{,}1}{605}\times 12^2+1{,}1\times 12$ = **12,938 à** 10^{-3} **près.**

En 2017=2016+1 le nombre d'individus sera de 12 938.

2.b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n\leqslant 55$.
Initialisation
Pour $n=0$ $u_0=12$ et $0\leqslant 12\leqslant 55$
La propriété est vérifiée pour $n=0$.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $0\leqslant u_n\leqslant 55$ et on doit démontrer que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 55$.
g est une fonction croissante sur [0;60] donc si $0\leqslant u_n\leqslant 55$ alors $g(0)\leqslant g(u_n)\leqslant g(55)$. Or $g(0)=0$ et $g(55)=55$ car 0 et 55 sont les solutions de l'équation g(x)=x et $g(u_n)=u_{n+1}$.
On obtient : $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 55$ donc la propriété est héréditaire.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

1.c. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{1,1}{605}u_n^2+1,1\,u_n-u_n=-\frac{1,1}{605}u_n^2+0,1\,u_n=0,1\,u_n\left(-\frac{11}{605}u_n+1\right)=0,1\,u_n\left(-\frac{1}{55}u_n+1\right)$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{0,1}{55}u_n(-u_n+55)\ .$$

Or $u_n \geqslant 0$ et $55-u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$.

Conséquence

La suite (u_n) est croissante.

1.d. **La suite (u_n) est croissante et majorée par 55 donc convergente.**

1.e. $g(l)=l \Leftrightarrow (l=0$ ou $l=55)$

$u_0=12$ et (u_n) est une suite croissante donc $12 \leqslant l$

Conséquence

$l=55$.

3. **Variables :** n un entier naturel
u nombre réel

Traitement : n prend la valeur 0
u prend la valeur 12
Tant que **u < 50**
u prend la valeur **g(u)**
n Prend la valeur **n+1**
Fin Tant que

Sortie : Afficher **n**

Programme en Python (non demandé)

```
print('Début de programme')
n=0
u=12
while(u<50):
    u=u**2*(-1.1/605)+1.1*u
    n=n+1
print("La population dépassera 50000 individus au bout de:"+str(n)+" "+"années")
print('Finde programme')
```

Exécution du programme

```
Début de programme
La population dépassera 50000 individus au bout de:36 années
Finde programme
>>>
```

Conséquence

La population dépassera 50000 individus en 2016+36= **2052 .**

On modifie le programme pour obtenir les valeurs de u_n pour n=1 à n=36 (on n'arrondit pas à l'unité).

```
print('Début de programme')
n=0
u=12
while(u<50):
    u=u**2*(-1.1/605)+1.1*u
    n=n+1
    print(n," ",u)
print("La population dépassera 50000 individus au bout de:"+str(n)+" "+"années")
print('Finde programme')
```

On obtient :

```
Début de programme
1   12.93818181818182
2   13.927642638617584
3   14.967717394353818
4   16.05715719924876
5   17.194086924043845
6   18.375974479809003
7   19.599614767639736
8   20.861130973422107
9   22.15599536987292
10   23.47907103262416
11   24.82467490578656
12   26.1866615160416
13   27.558525410635337
14   28.9335191829559
15   30.30478286068699
16   31.665479575422257
17   33.008931902525426
18   34.3287531194224
19   35.61896790275691
20   36.874117648564194
21   38.089346590947606
22   39.260466115996316
23   40.383996000968146
24   41.45718263196276
25   42.477995455559196
26   43.44510391398328
27   44.35783784338742
28   45.21613475838025
29   46.02047761151282
30   46.771826537042735
31   47.471547813272075
32   48.121342864076055
33   48.72317962495283
34   49.27922807332917
35   49.7918012088381
36   50.26330229768473
La population dépassera 50000 individus au bout de:36 années
Finde programme
```