Exercice 5 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

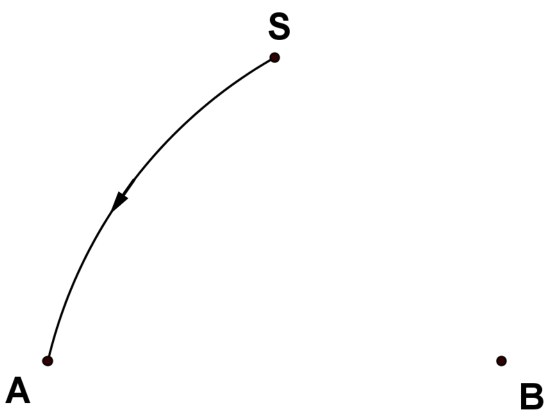
Dans un jeu vidéo en ligne, les joueurs peuvent décider de rejoindre l'équipe A (statut noté A) ou l'équipe B (statut noté B) on bien de n'en rejoindre aucune et rester ainsi solitaire (statut noté S).
Chaque jour, chaque joueur peut changer de statut mais ne peut pas se retirer du jeu.
Les données recueillies sur les premières semaines après le lancement du jeu ont permis de dégager les tendances suivantes :

- un joueur de l'équipe A y reste le jour suivant avec une probabilité de 0,6 ; il devient joueur solitaire avec une probabilité de 0,25. Sinon, il rejoint l'équipe B.
- un joueur de l'équipe B y reste le jour suivant avec une probabilité de 0,6 ; sinon, il devient joueur solitaire avec une probabilité identique à celle de rejoindre l'équipe A ;
- un joueur solitaire garde ce statut le jour suivant avec une probabilité de $\frac{1}{7}$; il rejoint l'équipe B avec une probabilité 3 fois plus élevée que celle de rejoindre l'équipe A.

Au début du jeu, à la clôture des inscriptions, tous les joueurs sont solidaires.
On note $U_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n & s_n\end{pmatrix}$ l'état probabiliste des statuts d'un joueur au bout de n jours.
Ainsi a_n est la probabilité d'être dans l'équipe A, b_n celle d'être dans l'équipe B et s_n celle d'être un joueur solitaire après n jours de jeu.
On a donc : $a_0=0$, $b_0=0$ et $s_0=1$.

1. On note p la probabilité qu'un joueur solitaire un jour donné rejoint l'équipe A le jour suivant.
Justifier que $p=\frac{3}{14}$.

2.a. Recopier et compléter le graphe probabiliste ci-dessous représentant la situation.



2.b. On admet que la matrice de transition est : $T=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel n, on a donc : $U_{n+1}=U_nT$
Montrer alors que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n=U_0T^n$

2.c. Déterminer l'état probabiliste au bout d'une semaine, en arrondissant au millième.

3. On pose $V=\begin{pmatrix}300 & 405 & 182\end{pmatrix}$

3.a. Donner sans détailler les calculs, le produit matriciel VT. Que constate-t-on ?
3.b. Déterminer un état probabiliste qui reste stable d'un jour sur l'autre.

4. On donne l'algorithme suivant, où la commande « U[i] » renvoie le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ colonne d'une matrice ligne U.

Variables : k est un entier naturel
U une matrice de taille 1×3
T une matrice carrée d'ordre 3

Traitement : U prend la valeur $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
T prend la valeur $\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$
Pour k allant de 1 à 7
U prend la valeur UT
Fin Pour

Sortie : Afficher U[1]

4.a. Quelle est la valeur numérique arrondie au millième de la sortie de cet algorithme ?
Interpréter dans le contexte de l'exercice.

4.b. Recopier et modifier cet algorithme pour qu'il affiche la fréquence de joueurs solitaires au bout de 13 jours.

CORRECTION

1. L'énoncé précise :

« un joueur solitaire garde ce statut avec une probabilité de $\frac{1}{7}$; il rejoint l'équipe B avec une probabilité 3 fois plus élevée que celle de rejoindre l'équipe A »

Si on note p la probabilité qu'il regagne l'équipe A alors 3p est la probabilité qu'il rejoigne l'équipe B.

On a : $\frac{1}{7}+p+3p=1 \quad \Leftrightarrow \quad 4p=\frac{6}{7} \quad \Leftrightarrow \quad p=\frac{3}{14}$ et $3p=\frac{9}{14}$.

2.a. Le graphe probabiliste a 3 sommets : A ; B et S.

. un joueur solitaire garde ce statit avec une probabilité de $\frac{1}{7}$, rejoint l'équipe A avec une probabilité $\frac{3}{14}$ et rerejoint l'équipe B avec une probabilité de $\frac{9}{14}$.

Conséquences

Le poids de l'arête SS est $\frac{1}{7}$. Le poids de l'arête SA est $\frac{3}{14}$. Le poids de l'arête SB est $\frac{9}{14}$.

. un joueur de l'équipe A y reste le jour suivant avec une probabilité de 0,6, il devient joueur solitaire avec la probabilité de 0,25, sinon il rejoint l'équipe B.
La probabilité qu'il rejoigne l'équipe B est : 1-0,6-0,25=0,15.

Conséquences

Le poids de l'arête AA est : 0,6.
Le poids de l'arête AS est : 0,25
Le poids de l'arête AB est : 0,15

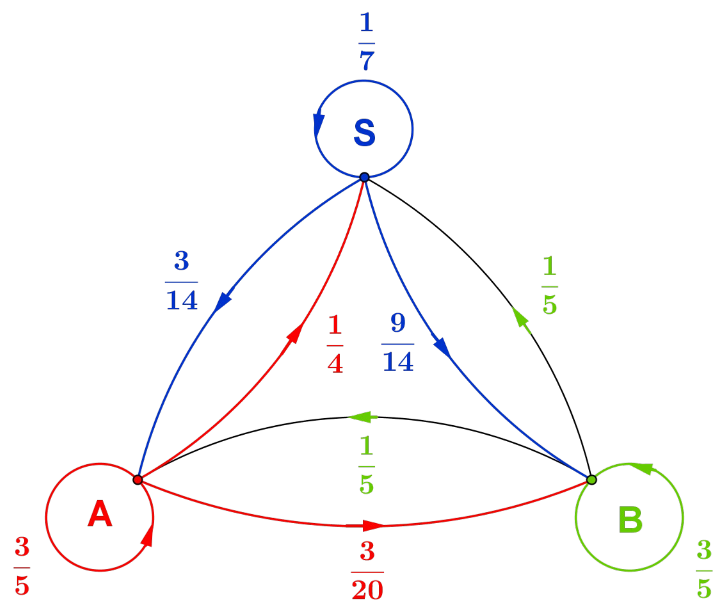
. un joueur de l'équipe B y reste le jour suivant avec une probabilité de 0,6, sinon il devient solitaire avec une probabilité identique à celle de rejoindre l'équipe A.

La probabilité qu'il devienne solitaire ou qu'il rejoigne l'équipe A est : $\frac{1}{2}(1-0,6)=0,2$.

Conséquences

Le poids de l'arête BB est : 0,6.
Le poids de l'arête BA est : 0,2.
Le poids de l'arête BS est : 0,2.

. On obtient l'arbre probabiliste suivant :



2.b. Remarque (La détermination de T n'est pas demandée)
Les sommets sont classés dans l'ordre alphabétique.
Dans cet exercice on utilise les matrices lignes.

Dans ce cas la matrice de transition est : $T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$.

t_{11} est le poids de l'arête AA : $0{,}6=\frac{3}{5}$ t_{12} est le poids de l'arête AB : $0{,}15=\frac{3}{20}$

t_{13} est le poids de l'arête AS : $0{,}25=\frac{1}{4}$ t_{21} est le poids de l'arête BA : $0{,}2=\frac{1}{5}$

t_{22} est le poids de l'arête BB : $0{,}6=\frac{3}{5}$ t_{23} est le poids de l'arête BS : $0{,}2=\frac{1}{5}$

t_{31} est le poids de l'arête SA : $\frac{3}{14}$ t_{32} est le poids de l'arête SB : $\frac{9}{14}$

t_{33} est le poids de l'arête SS : $\frac{1}{7}$

donc $T=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

- Pour tout entier naturel n ; on a donc $U_{n+1}=U_nT$.
- On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $U_n=U_0T^n$

Initialisation
Pour n=0 on a $U_{0+1}=U_0T$ soit $U_1=U_0T^1$
Donc la propriété est vérifiée pour n=0.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $U_n=U_0T^n$ et on doit démontrer que $U_{n+1}=U_0T^{n+1}$.
Or $U_{n+1}=U_nT=U_nT^1=(U_0T^n)T^1=U_0T^{n+1}$.
Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier n : $U_n=U_0T^n$.

2.c. Une semaine correspond à 7 jours.
L'état probabiliste au bout d'une semaine est $U^7=U_0T^7$.
En utilisant la calculatrice et en arrondissant au millième, on obtient : $U_7=\begin{pmatrix}0{,}338 & 0{,}405 & 0{,}205\end{pmatrix}$.

3. $V=\begin{pmatrix}300 & 405 & 182\end{pmatrix}$

3.a. $VT=\begin{pmatrix}300 & 405 & 182\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

$$VT=\begin{pmatrix}300\times\frac{3}{5}+405\times\frac{1}{5}+182\times\frac{3}{14} & 300\times\frac{3}{20}+405\times\frac{3}{5}+182\times\frac{9}{14} & 300\times\frac{1}{4}+405\times\frac{1}{5}+180\times\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

$VT=\begin{pmatrix}180+81+39 & 15+243+117 & 75+81+26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}300 & 405 & 182\end{pmatrix}$.

On constate que : VT=V.

<u>Remarque</u>

Le détail des calculs n'est pas demandé, on peut donc utiliser la calculatrice.

3.b. $U=\begin{pmatrix}a & b & s\end{pmatrix}$ est un état stable si et seulement si $a+b+s=1$ et $UT=T$.

On a $300+405+182=887$ et V=VT

On pose : $U=\dfrac{1}{887}V=\begin{pmatrix}\dfrac{300}{887} & \dfrac{405}{887} & \dfrac{182}{887}\end{pmatrix}$

$\dfrac{300}{887}+\dfrac{408}{887}+\dfrac{182}{887}=1$ et UT=T donc U est un état stable.

En utilisant la calculatrice on donne les valeurs approchées au millième.

$U=\begin{pmatrix}0{,}338 & 0{,}457 & 0{,}205\end{pmatrix}$

4.a. En utilisant le résultat de **2.c.** on obtient : **0,338.**

Au bout d'une semaine la probabilité qu'un joueur soit dans l'équipe A est $a_7=0{,}338$.

4.b. Modification de l'algorithme

Variables : k est un entier naturel
U est une matrice de taille 1×3
T est une matrice carrée d'ordre 3

Traitement : U prend la valeur $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

T prend la valeur $\begin{pmatrix}\dfrac{3}{5} & \dfrac{3}{20} & \dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{1}{5} & \dfrac{3}{5} & \dfrac{1}{5}\\[2mm] \dfrac{3}{14} & \dfrac{9}{14} & \dfrac{1}{7}\end{pmatrix}$

pour k allant de 1 à **13**
    U prend la valeur UT

Sortie : Afficher **U[3]**