## Exercice 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{(\ln(x))^2}{x}$ ..

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

**1.** Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.

**2.a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$ : $f(x)=4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$ .

**2.b.** En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ .

**3.** On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

**3.a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$ , $f'(x)=\frac{\ln(x)(2-\ln(x))}{x^2}$ .

**3.b.** Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x strictement positif.

**3.c.** Calculer $f(1)$ et $f(e^2)$ .

On obtient le tableau de variations ci-dessous.

| x | 0 | | 1 | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f | ‖ $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ | 0 |

**4.** Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0;+\infty[$ et donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$ .

**CORRECTION**

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ : $f(x)=\frac{(\ln(x))^2}{x}$.

**1.** $f(x)=(\ln(x))^2\times\frac{1}{x}$

x appartient à $]0;+\infty[$

$\lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim_{x\to 0}(\ln(x))^2=+\infty$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$

$\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty$

**La droite d'équation x=0 est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$.**

**2.a.** x appartient $]0;+\infty[$

$\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x)$

$\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{\frac{1}{4}(\ln(x))^2}{(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{4}\frac{(\ln(x))^2}{x}$ donc $4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2=f(x)$

**2.b.** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2=0$

Conséquence

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

**La droite d'équation y=0 est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.**

**3.a.** Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$  $((\ln(x))^2)'=2(\ln(x))\times\frac{1}{x}$

On dérive un quotient :

$u(x)=(\ln(x))^2$  $u'(x)=2(\ln(x))\times\frac{1}{x}$

$v(x)=x$  $v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{x\times2(\ln(x))\times\frac{1}{x}-1\times(\ln(x))^2}{x^2}=\frac{2\ln(x)-(\ln(x))^2}{x^2}=\frac{\ln(x)(2-\ln(x))}{x^2}$$

**3.b.** Le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ est le signe du produit $\ln(x)(2-\ln(x))$.

$\ln(x)=0 \Leftrightarrow x=1$  $\ln(x)>0 \Leftrightarrow x>1$  $\ln(x)<0 \Leftrightarrow x<1$

$2-\ln(x)=0 \Leftrightarrow 2=\ln(x) \Leftrightarrow e^2=x$  $2-\ln(x)>0 \Leftrightarrow 2>\ln(x) \Leftrightarrow e^2>x$

$2-\ln(x)<0 \Leftrightarrow 2<\ln(x) \Leftrightarrow e^2<x$.

On donne le signe de $f'(x)$ sous la forme d'un tableau.

| x | 0 | | 1 | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ln(x) | | − | 0 | + | | | |
| 2-ln(x) | | | + | | 0 | − | |
| f '(x) | | − | 0 | + | 0 | − | |

**3.c.** $f(1)=0$ car $\ln(1)=0$

$$f(e^2)=\frac{(\ln(e^2))^2}{e^2}=\frac{2^2}{e^2}=\frac{4}{e^2}$$

**4.** Le tableau de variations nous montre que la fonction $f$ admet un maximum sur l'intervalle $[1;+\infty[$ égal à : $\frac{4}{e^2}=0,54$ à $10^{-2}$ près donc $\frac{4}{e^2}<1$.

Conséquence

L'équation f(x)=1 n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1;+\infty[$ .

. f est continue et strictement décroissante sur ]0;1], l'intervalle image est $[0;+\infty[$ et 1 appartient à cet intervalle donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que **l'équation f(x)=1 admet une solution unique $\alpha$ appartenant à l'intervalle ]0;1].**

En utilisant la calculatrice , on obtient=

f(0,5)=0,96 à $10^{-2}$ près et f(0,4)=2,10 à $10^{-2}$ près puis f(0,49)=1,04 à $10^{-2}$ près.

Conclusion

**$0,49<\alpha<0,5$**