

Exercice 3

3 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = 2e^x - e^{2x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On admet que, pour tout x appartenant à $[0; \ln(2)]$, $f(x)$ est positif.

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Proposition A :

L'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln(2)$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ est égale à 1 unité d'aire.

Partie B

Soit n un entier strictement positif.

Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par $f_n(x) = 2n e^x - e^{2x}$ et $\mathcal{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

On admet que f_n est dérivable et que $\mathcal{C}_n$ admet une tangente horizontale en un unique point S_n .

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Proposition B :

Pour tout entier strictement positif n l'ordonnée du point S_n est n^2 .

CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x : $f(x) = 2e^x - e^{2x}$

Proposition A : FAUSSE

Justifications

f est continue et positive sur l'intervalle $[0; \ln(2)]$ donc l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln(2)$, la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est : $\int_0^{\ln(2)} f(x) dx$.

Soit a un nombre réel non nul fixé, si g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{ax}$ alors la fonction G , définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{a} e^{ax}$, est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

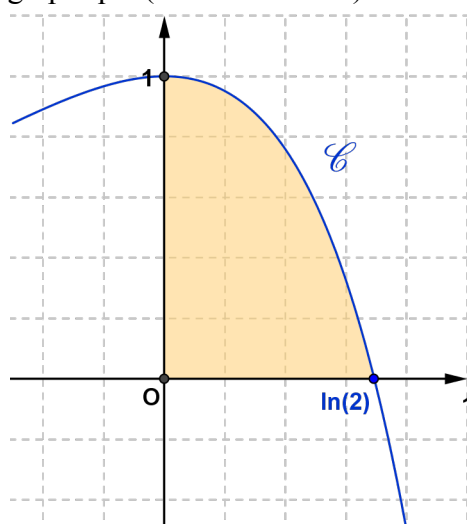
Donc F , définie sur $[0; \ln(2)]$ par $F(x) = 2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}$, est une primitive de f sur $[0; \ln(2)]$.

$$\int_0^{\ln(2)} f(x) dx = F(\ln(2)) - F(0) = 2e^{\ln(2)} - \frac{1}{2}e^{2\ln(2)} - 2e^0 + \frac{1}{2}e^0 = 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Conclusion

L'aire du domaine considéré est égale à $\frac{1}{2}$ donc la proposition A est fausse.

On donne une représentation graphique (non demandée).



Partie B

n est un entier naturel non nul et x est un nombre réel

$$f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$$

Proposition B : VRAIE

Justifications

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f_n'(x) = 2ne^x - 2e^{2x} = 2ne^x - e^x \times e^x = 2e^x(n - e^x)$$

$$e^x > 0 \text{ donc } f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow n - e^x = 0 \Leftrightarrow n = e^x \Leftrightarrow x = \ln(n)$$

L'unique point S_n où $\mathcal{C}_n$ admet une tangente horizontale a pour abscisse : $\ln(n)$.

$$\text{L'ordonnée de } S_n \text{ est : } f_n(\ln(n)) = 2ne^{\ln(n)} - e^{2\ln(n)} = 2n \times n - e^{\ln(n^2)} = 2n^2 - n^2 = n^2$$

Conclusion

La proposition B est vraie.