Exercice 4 3 points

Les questions 1. et 2. de cet exercice pourront être traitées de manière indépendante.
On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n = \frac{1+i}{(1-i)^n}$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

1.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.

1.b. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

2. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel ?

CORRECTION

Pour tout entier naturel n : $z_n=\frac{1+i}{(1-i)^n}$.

1.a. Pour tout entier naturel n :

$\frac{z_{n+4}}{z_n}=\frac{1+i}{(1-i)^{n+4}}\times\frac{(1+i)^n}{1+i}=\frac{1}{(1-i)^4}$

$(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

$(1-i)^4=(-2i)^2=4i^2=-4$

$\frac{z_{n+4}}{z_n}=-\frac{1}{4}$ $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ **est un nombre réel.**

1.b. Pour tout entier naturel n : $z_{n+4}=-\frac{1}{4}z_n$

$\overrightarrow{OA_n}(z_n)$ $\overrightarrow{OA_{n+4}}(z_{n+4})$ $\overrightarrow{OA_{n+4}}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA_n}$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA_n}$ et $\overrightarrow{OA_{n+4}}$ sont colinéaires donc **les points O ; A_n et A_{n+4} sont alignés.**

2. Pour tout entier naturel n : $z_n=\frac{1-i}{(1-i)^n}$.

Le conjugué de $(1-i)^n$ est $(1+i)^n$ et $(1-i)^n\times(1+i)^n=(1+1)^n=2^n$

$z_n=\frac{(1+i)(1+i)^n}{(1-i)^n(1+i)^n}=\frac{(1+i)^{n+1}}{2^n}$

z_n est un nombre réel si et seulement si $(1+i)^{n+1}$ est un nombre réel.

On détermine les valeurs de $(1+i)^k$ pour tout entier naturel k.

$(1+i)^1=1+i$

$(1+i)^2=1+i^2+2i=2i$

$(1+i)^3=2i(1+i)=2i-2=-2+2i$

$(1+i)^4=(2i)^2=-4$

Pour tout entier naturel k, on effectue la division euclidienne de k par 4, $k=4q+r$ q et r sont des entiers naturels et $0\leqslant r<4$.

Si r=0 donc k=4q ou $k\equiv 0\ (4)$ alors $(1+i)^k=[(1+i)^2]^q=(-4)^q$.

Si r=1 donc k=4q+1 ou $k\equiv 1\ (4)$ alors $(1+i)^k=['1+i¿^4]^q(1+i)=(-4)^q(1+i)$.

Si r=2 donc k=4q+2 ou $k\equiv 2\ (4)$ alors $(1+i)^k=[(1+i)^4]^q(1+i)^2=(-4)^q(2i)$.

Si r=3 donc k=4q+3 ou $k\equiv 3\ (4)$ alors $(1+i)^k=[(1+i)^4]^q(1+i)^3=(-4)^q(-2+2i)$.

Donc $(1+i)^k$ est un nombre réel si et seulement si $k\equiv 0\ (4)$

Conclusion

z_n est un nombre réel si et seulement si $n+1\equiv 0\ (4)$ $\Leftrightarrow$ $n\equiv -1\ (4)$ $\Leftrightarrow$ $n\equiv 3\ (4)$

C'est à dire z_n **est un nombre réel si et selement s'il existe un entier naturel q tel que n=4q+3.**