Exercice 5 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3$, $u_1=6$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2}=\frac{5}{4}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$.
Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1 .

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.

3. Que peut-on conjecturer à propos de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :
$v_n=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$ et $w_n=u_n-7$.

1.a. Démontrer que (v_n) est une suite croissante.
1.b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{21}{4}$.

2.a. En utilisant le résultat de la question 1.b. montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$u_n<u_{n+1}<15$.
2.b. En déduire qie la suite (u_n) est convergente.

3.a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3.b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=7-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
3.c. Calculer la limite de la suite (u_n) .

CORRECTION

Partie A :

(u_n) est la suite définie par $u_0=3$ et $u_1=6$ t pour tout entier naturel n : $u_{n+2}=\frac{5}{4}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$.

1. En B4 on écrit : **=1,25*B3-0,25*B2.**

2. En utilisant la calculatrice on complète le tableau.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	6.75
5	3	6.938
6	4	6.984
7	5	6.996

3. Conjecture :
La suite (u_n) converge vers 7.

Partie B : étude de la suite

1.a. Pour tout entier naturel n

$$v_n=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n \quad \text{donc}$$

$$v_{n+1}=u_{n+2}-\frac{1}{4}u_{n+1}=\frac{5}{4}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{4}u_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n=v_n$$

et la suite (v_n) est constante.

$$v_0=u_1-\frac{1}{4}u_0=6-\frac{1}{4}\times 3=\frac{21}{4}$$

Conclusion

Pour tout entier naturel n : $v_n=\frac{21}{4}$.

1.b. Pour tout entier naturel n :

$$v_n=\frac{21}{4}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n \quad \text{donc} \quad u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{21}{4} .$$

2.a. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n < u_{n+1} < 15$.

Initialisation

$u_0=3$, $u_1=6$ et $3<6<15$ donc $u_0 < u_1 < 15$.

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n < u_{n+1} < 15$ et on doit démontrer que $u_{n+1} < u_{n+2} < 15$.

Si $u_n < u_{n+1} < 15$ alors $\frac{1}{4}u_n < \frac{1}{4}u_{n+1} < \frac{1}{4}\times 15$ et $\frac{1}{4}u_n+\frac{21}{4} < \frac{1}{4}u_{n+1}+\frac{21}{4} < \frac{15}{4}+\frac{21}{4}$

soit $u_{n+1} < u_{n+2} < \frac{36}{4}=9 < 15$.

Conclusion

Le principe de récurrence, nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n < u_{n+1} < 15$.

2.b. Pour tout entier naturel n, on a : $u_n < u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

. Pour tout entier naturel n, on a : $u_n < 15$ donc la suite (u_n) est majorée par 15.

. Conséquence

La suite (u_n) est croissante et majorée donc convergente.

3.a. Pour tout entier naturel n :

$w_n = u_n - 7$

$w_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 = \frac{1}{4}u_n - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}(u_n - 7) = \frac{1}{4}w_n$

(w_n) est la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$.

3.b. Pour tout entier naturel n :

$w_n = w_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

3.c. $0 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n =$ **7.**