

Exercice 5 **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité** **5 points**

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).

Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel n , cette évolution par :

$$\begin{cases} b_0 = 1000 \\ c_0 = 1500 \\ b_{n+1} = 0,3b_n + 0,5c_n \\ c_{n+1} = -0,5b_n + 1,3c_n \end{cases}$$

où b_n représentent approximativement le nombre de buses et c_n le nombre approximatif de campagnols le 1^{er} juin de l'année 2000 + n (où n désigne un entier naturel).

1. On note les matrices $P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n , U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1.a. Vérifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 1050 \\ 1450 \end{pmatrix}$ et calculer U_2 .

1.b. Vérifier que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = AU_n$.

2. On donne les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que P a pour inverse une matrice Q de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.

2.a. Déterminer la valeur de a en justifiant.

2.b. On admet que $A = PTQ$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$A^n = PT^nQ.$$

2.c. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$T_n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}.$$

3. Lucie exécute l'algorithme ci-dessous et obtient en sortie $N=40$.

Quelle conclusion Lucie peut-elle énoncer pour les buses et les campagnols ?

Initialisation : N prend la valeur 0
 B prend la valeur 1 000
 C prend la valeur 1 500

Traitement : Tant que $B > 2$ ou $C > 2$
 N prend la valeur $N+1$
 R prend la valeur B
 B prend la valeur $0,3R + 0,5C$
 C prend la valeur $-0,5R + 1,3C$
 Fin Tant que

Sortie : Afficher N

4. On admet que pour tout entier naturel n , non nul, on a :

$$U_n = \begin{pmatrix} 1000 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n \\ 1500 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad n \leq 10 \times 1,1^n$$

4.a. En déduire les limites suites (b_n) et (c_n) .

4.b. Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population des campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus.

À la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice vous paraît-il cohérent ?

CORRECTION

1.a. $U_0 = \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \quad b_0 = 1000 \quad \text{et} \quad c_0 = 1500 \quad U_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1500 \end{pmatrix}.$

$$b_1 = 0,3 b_0 + 0,5 c_0 = 300 + 750 = 1050 \quad c_1 = -0,5 b_0 + 1,3 c_0 = -500 + 1950 = 1450 \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1050 \\ 1450 \end{pmatrix}.$$

$$b_2 = 0,3 b_1 + 0,5 c_1 = 315 + 725 = 1040 \quad c_2 = -0,5 b_1 + 1,3 c_1 = -525 + 1885 = 1360 \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1040 \\ 1360 \end{pmatrix}.$$

1.b. Pour tout entier naturel n :

$$AU_n = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 b_n + 0,5 c_n \\ -0,5 b_n + 1,3 c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$

2.a. $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+a & 1 \end{pmatrix}$

$$PQ = I \Leftrightarrow 1+a=0 \Leftrightarrow a=-1$$

On vérifie que $QP = I$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Conséquence

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est l'inverse de } P.$$

2.b. Remarque : (calcul non demandé)

$$PT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0,8 & 1,3 \end{pmatrix}$$

$$PTQ = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0,8 & 1,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix} = A$$

. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , non nul, on a $A^n = PT^n Q$.

Initialisation

On a $A = PTQ$ donc $A^1 = PT^1 Q$ et la propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , non nul, on suppose : $A^n = PT^n Q$ et on doit démontrer que : $A^{n+1} = PT^{n+1} Q$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = (PT^n Q) \times (PTQ) = PT^n (QP) TQ = PT^n I TQ = PT^n TQ = PT^{n+1} Q.$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , non nul, on a :

$$A^n = PT^n Q.$$

2.c. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , non nul, on a

$$T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5 n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}$$

Initialisation

$$T^1 = T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,8^1 & 0,5 \times 1 \times 0,8^0 \\ 0 & 0,8^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , non nul,

on suppose : $T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}$ et on doit démontrer : $T^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,8^{n+1} & 0,5(n+1) \times 0,8^n \\ 0 & 0,8^{n+1} \end{pmatrix}$

$$T^{n+1} = T^n \times T = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

On calcule le coefficient du produit matriciel en haut et à droite :

$$0,8^n \times 0,5 + 0,5n \times 0,8^{n-1} \times 0,8 = 0,8^n \times 0,5 + 0,5n \times 0,8^n = 0,5(n+1)0,8^n$$

$$\text{donc } T^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,8^{n+1} & 0,5(n+1) \times 0,8^n \\ 0 & 0,8^{n+1} \end{pmatrix}$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , non nul :

$$T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}.$$

3. Pour $N=40$ $B \leq 2$ **et** $C \leq 2$ donc en 2040 le nombre de buses est inférieur ou égal à 2 et le nombre de campagnols est inférieur ou égal à 2.

Les buses et les campagnols sont en voie d'extinction.

4. On admet que pour tout entier naturel n , non nul, on a :

$$U_n = \begin{pmatrix} 1000 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n \\ 1500 - 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad n \leq 10 \times 1,1^n$$

$$b_n = 1000 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n$$

$$n \leq 10 \times 1,1^n \quad \text{donc} \quad n \times 0,8^n \leq 10 \times 1,1^n \times 0,8^n = 10 \times 0,88^n$$

$$0 < 0,88 < 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,88^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \times 0,8^n = 0$$

$$\text{de même} \quad 0 < 0,8 < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$$

Conséquences

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1000 \times 0,8^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{625}{2} n \times 0,8^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

$$c_n = 1500 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n$$

$$\text{De même} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$$

- 4.b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ donc à partir d'un certain rang c_n sera inférieur à 50. (D'après la troisième question ce rang sera inférieur à 40).

Conclusion

Le modèle proposé n'est pas cohérent.

Compléments

On peut facilement démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $n \leq 10 \times 1,1^n$, par exemple

- . Pour tout entier naturel n

En utilisant la formule du binôme

$$1,1^n = (1+0,1)^n = 1 + n \times 0,1 + \dots \geq 1 + 0,1n$$

$$10 \times 1,1^n \geq 10 + n \geq n$$

- En utilisant un raisonnement par récurrence

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$n \leq 10 \times 1,1^n.$$

Initialisation

Pour $n=0$ $1,1^0=1$ et $10 \times 1,1^0=10$ et $0 \leq 10$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose : $n \leq 10 \times 1,1^n$ et on doit démontrer que : $n+1 \leq 10 \times 1,1^{n+1}$.

$$\text{Or } 10 \times 1,1^{n+1} = 10 \times 1,1^n \times 1,1 = 10 \times 1,1^n (1+0,1) = 10 \times 1,1^n + 1,1^n$$

$$\text{on a } n \leq 10 \times 1,1^n \text{ et } 1 \leq 1,1^n$$

$$\text{donc } n+1 \leq 10 \times 1,1^n + 1,1^n = 10 \times 1,1^{n+1}$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a : $n \leq 10 \times 1,1^n$.

On peut proposer en programme en Python pour l'algorithme

- On étudie les variations des suites (b_n) et (c_n) .

$$\text{Pour tout entier naturel } n : b_n = 1000 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n \times 0,8^n.$$

Pour tout entier naturel n :

$$b_{n+1} - b_n = 1000 \times 0,8^{n+1} + \frac{625}{2} (n+1) \times 0,8^{n+1} - 1000 \times 0,8^n - \frac{625}{2} n \times 0,8^n$$

$$b_{n+1} - b_n = 0,8^n \left[1000(0,8-1) + \frac{625}{2} \times (0,8-1) + \frac{625}{2} \times 0,8 \right] = 0,8^n [-200 - 62,5n + 250]$$

$$b_{n+1} - b_n = 0,8^n (50 - 62,5n)$$

Pour tout entier naturel **non nul** : $b_{n+1} - b_n < 0$

La suite (b_n) est décroissante pour $n \geq 1$.

Pour tout entier naturel n : $c_n = 1500 \times 0,8^n$

$$c_{n+1} - c_n = 1500 \times 0,8^{n+1} + \frac{625}{2} (n+1) \times 0,8^{n+1} - 1500 \times 0,8^n - \frac{625}{2} n \times 0,8^n$$

$$c_{n+1} - c_n = 0,8^n \left[1500(0,8-1) + \frac{625}{2} n (0,8-1) + \frac{625}{2} \times 0,8 \right] = 0,8^n [-300 - 62,5n + 250]$$

$$c_{n+1} - c_n = 0,8^n (-50 - 62,5n) < 0$$

La suite (c_n) est décroissante.

- Programme en Python

```
print('Début de programme')
N=0
B=1000
C=1500
while (B>2):
    R=B
    B=0.3*R+0.5*C
    C=-0.5*R+1.3*C
    N=N+1
    print(N, " ", B, " ", C)
while (C>2):
    R=B
    B=0.3*R+0.5*C
    C=-0.5*R+1.3*C
    N=N+1
    print(N, B, " ", C)
print("N="+str(N))
print('Fin de programme')
```

.exécution du programme

```

Début de programme
1  1050.0  1450.0
2  1040.0  1360.0
3  992.0   1248.0
4  921.5999999999999  1126.4
5  839.6800000000001  1003.5200000000002
6  753.6640000000001  884.7360000000002
7  668.4672000000002  773.3248000000003
8  587.2025600000002  671.0886400000004
9  511.7050880000003  578.8139520000004
10 442.9185024000003  496.6055936000004
11 381.17834752000033  424.1280204800004
12 326.4175144960003  360.77725286400033
13 278.3138807808003  305.8016714752003
14 236.3949999718402  258.38523252736024
15 200.11111625523216  217.70330229964821
16 168.88498602639376  182.95873486192662
17 142.14486323888144  153.40386230730775
18 119.3453901253183  128.35258938005936
19 99.97991172762516  107.18567113141802
20 83.58680908399656  89.35141660703084
21 69.75175102871438  74.36343704714182
22 58.10724383218522  61.79659264692717
23 48.33046947311915  51.28194852491271
24 40.140115104392095  42.501298345826946
25 33.2926837042311  35.18163029737899
26 27.578620259958825  29.089777534477133
27 22.818474845226213  24.02740066484086
28 18.859242785988293  19.826383441680015
29 15.570964556636495  16.344677081189875
30 12.843627907585887  13.46259792722859
31 10.58438733589006  11.079563351604223
32 8.71509787656913  9.11123868914046
33 7.170148707540969  7.4870613575980345
34 5.894575291061308  6.14810541110696
35 4.842425292871873  5.0452493889083945
36 3.975352282315759  4.137611559144976
37 3.2614114642672156  3.3912188857305896
38 2.6740328821454593  2.777878819316159
39 2.1911492743017176  2.2742260240382772
40 1.794457794309654  1.8609191940989018
N=40
Fin de programme
>>>

```

