Exercice 2 — 6 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'une tumeur composée de cellules cancéreuses.
On note N(t) le nombre de cellules cancéreuses après un temps t exprimé en semaines et $N(0)=N_0$ le nombre de cellules cancéreuses au premier examen.
Pour tout réel t positif ou nul, on admet qu'il existe un nombre a tel que : $N(t)=N_0 e^{at}$.

1. Des cultures en laboratoire ont montré que le nombre de cellules de la tumeur double en 14 semaines.
En déduire la valeur du paramètre a.

2. En arrondissant la valeur de a obtenue, on peut écrire pour tout réel $t \geqslant 0$: $N(t)=N_0 e^{0,05t}$.
La plus petite tumeur détectable au toucher contient environ 10^9 cellules.
Lorsqu'une tumeur est détectable, on décide d'opérer le patient afin de la retirer.
Or, après l'intervention, il est possible qu'il reste jusqu'à 10^4 cellules indétectables.
En l'abscence de suivi médical, au bout de combien de temps la tumeur pourrait-elle redevenir détectable au toucher ?

Partie B

Pour atténuer le risque de récidive, le médecin peut proposer de compléter l'opération par une chimiothérapie.
Lors d'un traitement par chimiothérapie en intraveineuse, la concentration du médicament dans l'organisme, exprimée en $\mu mol.L^{-1}$, peut-être modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction c définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $c(t)=\frac{D}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{80}t}\right)$ où :

. D est un réel positif qui représente le débit d'écoulement du médicament dans la perfusion, exprimé en micromole par heure.
. k est un réel positif qui représente la clairance du patient, exprimé en litre par heure.

La clairance traduit la capacité interne du patient à éliminer plus ou moins vite le médicament de son organisme. Elle est propre à chaque individu et est inconnue au début du traitement. Il est nécessaire de la déterminer fin que le médecin puisse adapter le traitement en ajustant le débit D.

1. Détermination de la clairance.
Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes. On règle le débit de la perfusion sur 112 $\mu mol.h^{-1}$, au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament : elle est égale 6,8 $\mu mol.L^{-1}$.

1.a. Justifier que la clairance k du patient est solution de l'équation : $112(1--e^{-340})-6,8k=0$.
1.b. Démontrer que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
1.c. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution. Interpréter ce résultat.

2. Réglage du débit
2.a. Déterminer la limite l de la fonction c en $+\infty$ en fonction du débit D et de la clairance k.
2.b. La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite l.
Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être de $16\mu mol.L^{-1}$.
En déduire le débit D, à régler par le médecin, lorsque la clairance du patient est de 5,85 $L.h^{-1}$.

CORRECTION

Partie A

1. N(t) est le nombre de cellules cancéreuses après un temps t exprimé en semaines
$N(0)=N_0$ est le nombre de cellules cancéreuses au premier examen.
Pour tout réel t positif ou nul $N(t)=N_0e^{at}$.
Le nombre de cellules cancéreuses double en 14 semaines donc $N(14)=2N_0$.
Soit $N_0e^{14a}=2N_0 \Leftrightarrow e^{14a}=2 \Leftrightarrow 14a=\ln(2) \Leftrightarrow a=\frac{\ln(2)}{14}=$ **0,0495 à 10^{-4} près.**

2. Pour tout t réel positif ou nul, $N(t)=N_0e^{0,05t}$.
Si $N_0=10^4$ alors on doit déterminer t tel que $N(t)=10^9$.
$10^9=10^4e^{0,05t} \Leftrightarrow \frac{10^9}{10^4}=10^5=e^{0,05t} \Leftrightarrow \ln(10^5)=0,05t \Leftrightarrow t=\frac{\ln(10^5)}{0,05}=230,3$ à 10^{-1} près.

Conclusion
La tumeur peut revenir détectable au toucher au bout de 231 semaines.

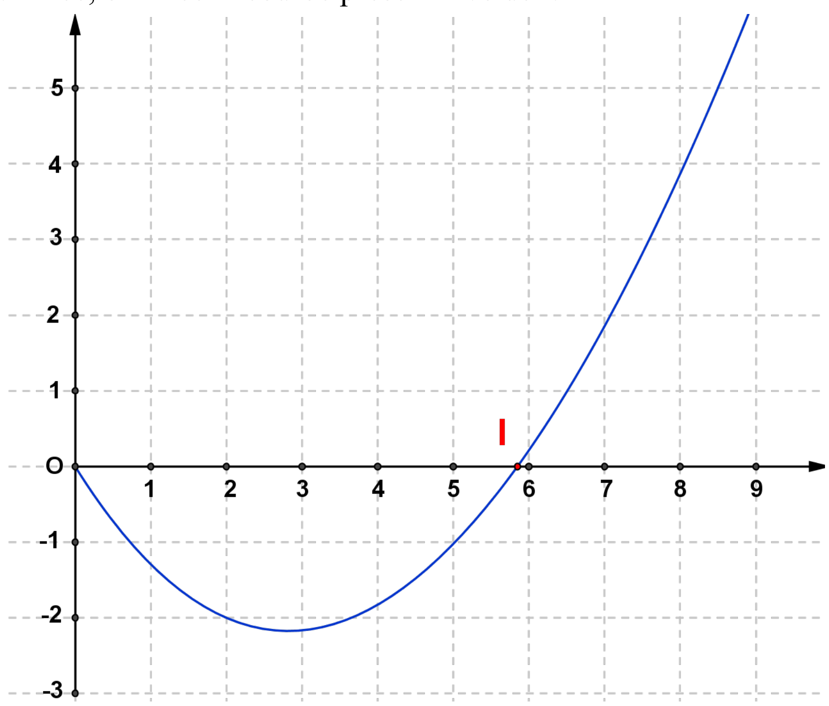
Partie B

$c(t)=\frac{D}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{80}t}\right)$ t exprimé en heure c(t) exprimé en $\mu mol.L^{-1}$

1.a. D=112 $\mu mol.L^{-1}$
Au bout de 6 heures la concentration du médicament est 6,8 $\mu mol.L^{-1}$.
$c(6)=6,8=\frac{112}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{80}\times 6}\right) \Leftrightarrow 6,8k=112\left(1-e^{-\frac{3}{40}k}\right)$
$\Leftrightarrow 112\left(1-e^{-\frac{3}{40}k}\right)-6,8k=0$

1.b. On veut démontrer que l'équation, d'inconnue k :
$112e^{-\frac{3}{40}k}+6,8k-112=0$
admet une unique solution dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x)=112e^{-\frac{3}{40}x}+6,8x-112$

. Avec la calculatrice, on trace la courbe présentative de f.



On remarque que f n'est pas une fonction monotone et que la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse:5,85.

. Pour démontrer ce résultat on peut étudier la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$;

$\left(e^{-\frac{3}{40}x}\right)'=-\frac{3}{40}e^{-\frac{3}{40}x}$ donc $f'(x)=112\times\left(\frac{-3}{40}\right)e^{-\frac{3}{40}x}+6{,}8=-8{,}4e^{-\frac{3}{40}x}+6{,}8$

$f'(x)\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 6{,}8\geqslant 8{,}4e^{-\frac{3}{40}x} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{6{,}8}{8{,}4}\geqslant e^{-\frac{3}{40}x} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{17}{21}\geqslant e^{-\frac{3}{40}x}$

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{17}{21}\right)\geqslant-\frac{3}{40}x$

On a : $-\frac{3}{40}<0$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{40}{3}\times\ln\left(\frac{17}{21}\right)\leqslant x$

$x_0=-\frac{40}{3}\times\ln\left(\frac{17}{21}\right)=2{,}817$ à 10^{-3} près

$f'(x)\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0< x < x_0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{3}{40}x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{3}{40}x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}6{,}8x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

Tableau de variation de f

x	0		x_0		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	0	↘	m	↗	$+\infty$

f est strictement décroissante sur $]0;x_0]$, donc $m<0$ et il n'existe pas de solution à l'équation f(x) = 0 sur l'intervalle $]0;x_0]$.

Sur l'intervalle $[x_0;+\infty[$, f est continue et strictement croissante et $f(x_0)=m<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe une solution unique à l'équation f(x) = 0.

1.c. En utilisant la calculatrice, on obtient pour valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution est : **5,85.**

<u>Conclusion</u>

On obtient, pour clairance du patient k = 5,85 $L.h^{-1}$ **.**

2. Réglage du débit

2.a. $c(t)=\frac{D}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{80}t}\right)$

$\lim\limits_{t\to+\infty}-\frac{k}{80}t=-\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-\frac{k}{80}t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}c(t)=\frac{D}{k}$.

2.b. On doit avoir $\frac{D}{k}=16$ donc D = 16k

<u>Conclusion</u>

Si k = 5,85 alors **D = 16x5,85= 93,6** $\mu mol.L^{-1}$ **.**