Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

On début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9\,u_n(1-u_n) \end{cases}$ où pour tout entier naturel n, modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2000+n.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle [0;1].

2.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9\,u_n$.

2.b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

2.c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.

Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	Taut que . . . . faire
	. . . .
	. . . .
	Fin tant que
Sortie :	Afficher . . . .

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues.

L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut-être modélisé par la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_{10} = 0{,}032 \\ v_{n+1} = 1{,}06\, v_n(1-v_n) \end{cases}$ où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre des tortues en milliers, au début de l'année 2000+n.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.

2. On admet dans ce modèle que la suite (v_n) est croissante et convergente.
On appelle ℓ sa limite. Montrer que : $\ell = 1{,}06\ell(1-\ell)$.

3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

CORRECTION

Partie A

1. (u_n) est la suite définie par :
$u_0=0{,}3$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}9u_n(1-u_n)$.
$u_1=0{,}9u_0(1-u_0)=0{,}9\times0{,}3\times(1-0{,}3)=0{,}27\times0{,}7=0{,}189$.
Au début de l'année 2000+1=2001, le nombre de tortues, en milliers, était : 0,189 (soit 189 tortues).
$u_2=0{,}9\times0{,}189\times(1-0{,}189)=0{,}9\times0{,}189\times0{,}811=0{,}138$ à 10^{-3} Près.
Au début de l'année 2000+2=2002, le nombre de tortues, en milliers était : 0,138 (soit 138 tortues)

2. On admet que pour entier naturel n : $0\leqslant u_n\leqslant1$ et $0\leqslant1-u_n\leqslant1$.

2.a. Pour tout entier naturel n : $0\leqslant1-u_n\leqslant1$ et $0\leqslant0{,}9u_n$ donc :
$0{,}9u_n\times0\leqslant0{,}9u_n(1-u_n)\leqslant0{,}9u_n\times1$ soit $0\leqslant u_{n+1}\leqslant0{,}9u_n$

2.b. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n on ait :
$0\leqslant u_n\leqslant0{,}u_n$.

Initialisation

Pour n=0 $u_0=0{,}3$ et $0{,}3\times0{,}9^0=0{,}3\times1=0{,}3$ donc $0\leqslant u_0\leqslant0{,}3\times0{,}9^0$

La propriété est vérifiée pour n=0

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $0\leqslant u_n\leqslant0{,}3\times0{,}9^n$ et on doit démontrer que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant0{,}3\times0{,}9^{n+1}$.

Nous avons vu que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant0{,}9u_n$ donc $0\leqslant u_{n+1}\leqslant0{,}9\times(0{,}3\times0{,}9^n)=0{,}3\times0{,}9^{n+1}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $0\leqslant u_n\leqslant0{,}3\times0{,}9^n$

2,c. $0<0{,}9<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}9^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}3\times0{,}9^n=0$;

Le théorème des des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=$ **0.**

Conséquense

Avec cette modélisation, l'espèce de tortues est menacée d'extinction.

3.

Variables :	u est un réel
	n est un un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur 0,3
	n prend la valeur 0
	Tant que **u > 0,03** faire
	u prend la valeur 0,9u(1-u)
	n prend la valeur n+1
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher **2000+n-1**

n	u_n
0	300
1	189
2	138
3	107
4	86
5	71
6	59
7	50
8	42
9	37
10	32
11	28

En faisant fonctionner l'algorithme, on obtient le tableau précédent (non demandé), les valeurs de u_n sont arrondie à l'unité près.
On trouve que le nombre de tortues en 2010 est 32.
Programme en Python (non demandé)

```
print('Début de programme')
u=0.3
n=0
print(2000," ",300)
while(u>0.03):
    u=u*(1-u)*0.9
    n=n+1
    w=u*1000
    v=round(w)
    m=2000+n
    print(m," ",v)
print('Fin de programme')
```

Exécution du programme

```
Début de programme
2000   300
2001   189
2002   138
2003   107
2004   86
2005   71
2006   59
2007   50
2008   43
2009   37
2010   32
2011   28
Fin de programme
```

Partie B

(v_n) est la suite définie par :
$v_{10}=0{,}032$ et pour tout entier $n \geqslant 10$: $v_{n+1}=1{,}06\,v_n(1-v_n)$.

1. $v_{11}=1{,}06\times v_{10}\times(1-v_{10})=1{,}06\times 0{,}32\times 0{,}968=0{,}033$ **à** 10^{-3} près.
Au début de l'année 2011 le nombre de tortues, en milliers, était de 0,033 (33 tortues).
$v_{12}=1{,}06\times 0{,}33\times 0{,}967=0{,}034$ à 10^{-3} près.
Au début de l'année 2012 le nombre de tortues, en milliers, était de 0,034 (34 tortues).

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}06\,v_n(1-v_n)=1{,}06\ell(1-\ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1}=\ell$
Conséquence
$\ell=1{,}06\ell(1-\ell)$

3. $\ell=1{,}06\ell(1-\ell) \Leftrightarrow 0=1{,}06\ell(1-\ell)-\ell \Leftrightarrow \ell(1{,}06-1{,}06\ell-1)=0 \Leftrightarrow \ell(0{,}06-1{,}06\ell)=0$
$\ell>32$ car la suite (v_n) est croissante donc $0{,}06-1{,}06\ell=0 \Leftrightarrow \ell=\dfrac{0{,}06}{1{,}06}=\dfrac{6}{106}=0{,}057$ à 10^{-3} près.
Conclusion
À long terme le nombre de tortues sera voisin de 57 (>30) donc la population ne sera pas en voie d'extinction.