EXERCICE 1 — 6 points

On étudie certaines caractéristiques d'un super marché d'une petite ville.

Partie A - Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.

On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X, notée E(X), est égale à :

$$\lim_{x \to -\infty} \int_0^x 0{,}2\,t\,e^{-0{,}2\,t}\,dt$$

Le but de cette partie est de démontrer que E(X)=5.

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(t)=0{,}2e^{-0{,}2t}$.

On définit la fonction G sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $G(t)=(-t-5)e^{-0{,}2t}$.

Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. En déduire que la valeur exacte de E(X) est 5.

Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer le résultat suivant :

$\lim_{x \to +\infty} x e^{-0{,}2x}=0$.

Partie B – Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du super marché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le super marché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T.

Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart-type un réel positif noté σ.

Grâce à cette étude, on estime que $P(T<10)=0{,}067$.

1. Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.

2. Dans cette question, on prend $\sigma=20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

Partie C – Durée d'attente pour le paiement

Ce super marché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1. La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0{,}2\ \text{min}^{-1}$.

1.a. Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.

1.b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.

2. L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :

- parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;
- Parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les événements suivants :

B : « le client paye à une borne automatique » :

$\bar{B}$: « le client paye à une caisse avec opérateur » ;

S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».

Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

Partie D – Bons d'achat

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre des cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 € d'achats.

Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31 €, le client obtient 12 cartes.

Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1. Un client effectue des ahats pour un montant de 158,02 €.

Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?

2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 €, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 %?

CORRECTION

Partie A – Démonstration préliminaire

1. g est définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t)=0,2\,t\,e^{-0,2\,t}$.
G est définie sur $[0;+\infty[$ par $G(t)=(-t-5)e^{-0,2t}$.
G est dérivable sur $[0;+\infty[$.
$(e^u)'=u'e^u \quad (e^{-0,2\,t})'=-0,2\,e^{-0,2\,t}$.
$G'(t)=-1\times e^{-0,2\,t}+(-t-5)\times(-0,2\,e^{-0,2\,t})=-e^{-0,2\,t}+0,2\,t\,e^{-0,2\,t}+1\times e^{-0,2\,t}=0,2\,t\,e^{-0,2\,t}=g(t)$.
Conclusion
G est une primitive de g sur $[0;+\infty[$.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$:
$$\int_0^x 0,2\,t\,e^{-0,2\,t}\,dt=\int_0^x g(t)\,dt=G(x)-G(0)=(-x-5)e^{-0,2x}-(-5)e^0=-x\,e^{-0,2x}+5\,e^{-0,2x}+5.$$
$\lim\limits_{x\to+\infty} -0,2\,x=-\infty \quad \lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,2\,x}=0$.
On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-0,2x}=0$.
Conséquence
$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x 0,2\,t\,e^{-0,2t}\,dt=5$ donc **E(X)=5**

Partie B – Étude de la durée de présence d'un client dans le super marché

T est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 40 (minutes) et d'écart-type σ.
On a $P(T<10)=0,067$.

1. La variable aléatoire $Y=\dfrac{T-40}{\sigma}$ suit la loi normale centrée et réduite.
$$(T<10) \Leftrightarrow \left(\frac{T-40}{\sigma}<\frac{10-40}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \left(Y<\frac{-30}{\sigma}\right)$$
En utilisant la calculatrice, on détermine α tel que $P(T<\alpha)=0,067$.
On obtient : $\alpha=-1,4985$ à 10^{-4} près.
$-1,4985=-\dfrac{30}{\sigma} \Leftrightarrow \sigma=\dfrac{30}{1,1985}=20,02$ à 10^{-2} près.
0,02 minute correspond à $0,02\times60=1,2$ seconde.
σ **= 20 minutes et 1 seconde** à la seconde près.

2. On nous demande de déterminer $P(60<T)$.
En utilisant la calculatrice, on obtient $P(60<T)=0,1587$.
Conclusion
15,87 % des clients passent plus qu'une heure dans le super marché.
Remarque
$P(\mu-\sigma\leqslant T\leqslant\mu+\sigma)=0,6827$
donc $P(\mu-\sigma\leqslant T)=P(t\leqslant\mu+\sigma)=\dfrac{1}{2}(1-0,6827)=0,1587$
Pour l'exemple, $\mu=40$ et $\sigma=20$ donc $P(60<t)=0,1587$.

Partie C – durée d'attente pour le paiement

On note T_1 la variable aléatoire égale à la durée d'attente, exprimée en minutes, à une borne automatique.
T_1 suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,2\ \text{min}^{-1}$.

1.a. La durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement est égale à l'espérance de T_1 soit 5 min (en utilisant le résultat de la partie A).

1.b. $P(T \leqslant 10) = \int_0^{10} 0,2e^{-0,2t}dt = -e^{-0,2\times 10}+e^0=-e^{-2}+1$

$P(10 < T_1)=1-P(T_1 \leqslant 10)=e^{-2}=$ **0,135.**

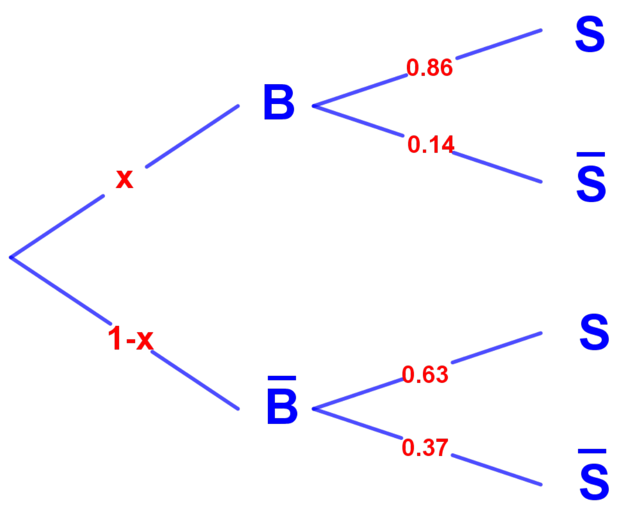
2. L'énoncé précise :

. $P_B(S)=0,86$ donc $P_B(\bar{S})=1-0,86=0,14$

. $P_{\bar{B}}(S)=0,63$ donc $P_{\bar{B}}(\bar{S})=1-0,63=0,37$

On note $P(B)=x$ ($0\leqslant x\leqslant 1$) donc $P(\bar{B})=1-x$.

On construit l'arbre pondéré suivant :



Le gérant souhaite que $P(S) \geqslant 0,75$.

En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :

$P(S)=P(B\cap S)+P(\bar{B}\cap S)=P(B)\times P_B(S)+P_{\bar{B}}(S)=x\times 0,86+(1-x)\times 0,63 = 0,86x+0,63-0,63x$

$P(S)=0,63+0,23x$

$P(S) \geqslant 0,75 \Leftrightarrow 0,63+0,23x \geqslant 0,75 \Leftrightarrow 0,23x \geqslant 0,12 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{0,12}{0,23}=\frac{12}{23}=0,5217$ à 10^{-4} près.

<u>Conclusion</u>

La proportion minimale de clients qui doivent choisir pour le paiement une borne automatique pour que au moins 75 % attendent moins de 10 minutes est : 52,17 %.

Partie D – Bons d'achat

On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On choisit au hasard une carte.
Succès S : « la carte est gagnante » la probabilité de succès est p=0,005.
Échec $\bar{S}$: « la carte n'est pas gagnante » la probabilité de l'échec est q=1-0,005=0,995.
La distribution des cartes est assimilée à un tirage avec remise.
La variable aléatoire Z égale au nombre de succès en n épreuves (n entier naturel non nul) la loi binomiale de paramètres n et $p=0,005$.

1. Pour un montant de 158,02 €, le client obtient 15 cartes donc $n=15$.

On note G l'événement : « le client au moins une carte gagnante pour les 15 cartes ».
$\bar{G}$: « le client obtient 15 cartes non gagnantes »
$P(\bar{G})=0{,}995$.
$P(G)=1-0{,}995^{15}$ = **0,07** à 10^{-2} près.

2. Pour n cartes obtenues, $P(\bar{G})=0{,}995^{n}$ et $P(G)=1-0{,}995^{n}$.
$P(G) \geqslant 0{,}50 \iff 1-0{,}995^{n} \geqslant 0{,}50 \iff 0{,}5 \geqslant 0{,}995^{n}$
ln est une fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$
$\iff \ln(0{,}5) \geqslant \ln(0{,}995^{n}) \iff \ln(0{,}5) \geqslant n\times\ln(0{,}995)$
$0 < 0{,}995 < 1$ donc $\ln(0{,}995) < 0$
$\iff \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}995)} \leqslant n$.
$\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}995)}=138{,}25$ à 10^{-2} près, n est un entier naturel $n \geqslant 139$.
Le montant minimal d'achats pour avoir une probabilité supérieure à 0,5 d'obtenir au moins une carte gagnante est : 1390 €.