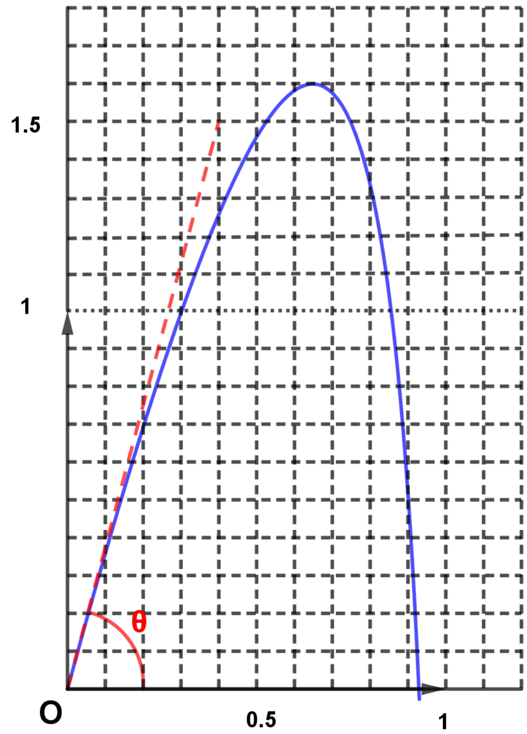
EXERCICE 2 4 points



Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0;1[par : $f(x)=bx+2\ln(1-x)$ où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, f(x) son ordonnée, toutes les deux sont exprimées en mètres.

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle [0;1[. On note f' sa fonction dérivée.
On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle [0;1[et que pour tout réel de l'intervalle [0;1[: $f'(x)=\dfrac{-bx+b-2}{1-x}$.

Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

3. Dans cette question, on choisit $b=5{,}69$.
L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné-ci dessus.
Donner une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1[, $f(x)=bx+2\ln(1-x)$
f est dérivable sur [0;1[

$(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ $\quad (\ln(1-x))'=\frac{-1}{1-x}$

$f'(x)=b+2\times\left(\frac{-1}{1-x}\right)=\frac{b(1-x)-2}{1-x}=\frac{-bx+b-2}{1-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -bx+b-2=0 \Leftrightarrow bx=b-2 \Leftrightarrow x=\frac{b-2}{b}$

$b\geqslant 2$ donc $0\leqslant b-2\leqslant b$ et $0\leqslant\frac{b-2}{b}<1$

$\frac{b-2}{b}$ appartient à l'intervalle [0;1[.

Le signe de $f'(x)$ sur [0;1[est le signe de $-bx+b-2$.

. Si $b\neq 2$ alors $0<\frac{b-2}{b}<1$ et -b < 0 donc f est croissante sur $\left[0;\frac{b-2}{b}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{b-2}{b};1\right[$.

$f\left(\frac{b-2}{b}\right)$ est le maximum de f sur [0;1[.

$f\left(\frac{b-2}{b}\right)=b\times\left(\frac{b-2}{b}\right)+2\ln\left(1-\frac{b-2}{b}\right)=b-2+2\ln\left(\frac{b-b+2}{b}\right)=b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$

. Si b=2 alors $f'(0)=0$ et f est décroissante sur [0;1[, le maximum de f(x) sur [0;1[est f(0) ;
$f(0)=b\times 0+2\ln(1-0)=0$.

Or, pour b=2, $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)=0+2\ln(1)=0$

Conclusion

Le maximum de la fonction f est égal à $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$ **.**

2. On veut que : $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)\leqslant 1{,}6 \Leftrightarrow b-3{,}6+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)\leqslant 0$

On considère la fonction g définie sur $[2;+\infty[$ par $g(x)=x-3{,}6+2\ln\left(\frac{2}{x}\right)$

$g(x)=x-3{,}6+2\ln(2)-2\ln(x)$
g est dérivable sur $[2;+\infty[$
$g'(x)=1-2\times\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x-2}{x}$

pour tout nombre réel de l'intervalle $[2;+\infty[$ $\frac{x-2}{x}\geqslant 0$ et $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$, $g(2)=-3{,}6<0$ et $g(6)=2{,}4+2\ln(2)-2\ln(6)=0{,}203\geqslant 0$.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α appartenant à l'intervalle [2;6].
On peut déterminer une valeur approchée de α , en utilisant la calculatrice (on proposera un programme Python utilisant la méthode de dichotomie en fin d'exercice).
On obtient : $5{,}69 < \alpha < 5{,}70$
g est croissante sur $[2;+\infty[$ donc g est négative sur $[0;\alpha[$ et positive sur $]\alpha;+\infty[$
Conclusion
Pour toutes les valeurs de b comprises entre 2 et α , le maximum de f est inférieur à 1,6 (m).

3. b = 5,69 donc le maximum de f est inférieur à 1,6 et $f(x)=5{,}69x+2\ln(1-x)$.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f à l'origine est $f'(0)$.

$f'(x)=\frac{-5{,}69\,x+5{,}69-2}{1-x}$ $\quad f'(0)=3{,}69$

Le repère est orthonormé donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe à l'origine est $\tan(\theta)$
En utilisant la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de θ telle que $\tan(\theta)=3{,}69$
on obtient $\theta=74{,}8°$ à 10^{-1} près.

Complément (non demandé)

<u>Programme Python</u>

```
print('Début de programme')
from math import*
a,b=2,6
while(b-a>=0.001):
    c=(a+b)/2                           # centre de l'intervalle
    if c-2*log(c)-3.6+2*log(2)>=0:     # condition g(c)>=0
        b=c
    else :
        a=c
print("a="+str(a),"b="+str(b))
print('Fin de programme')
```

<u>Exécution du progamme</u>

```
Début de programme
a=5.69140625 b=5.6923828125
Fin de programme
>>>
```

On obtient : $5{,}69\leqslant\alpha\leqslant5{,}70$

Remarque
Pour le logiciel Python, on note log la fonction logarithme népérien.