EXERCICE 3 — 5 points

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.

On considère les points B(10;-8;2), C(-1;-8;5) et D(14;4;8).

1.a. Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).

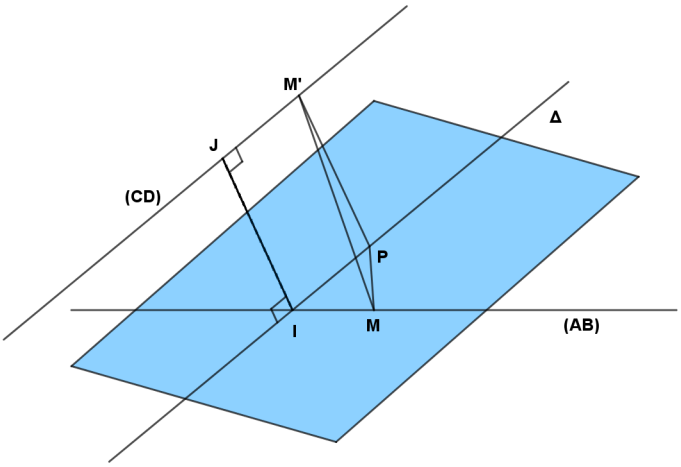
1.b. Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.

2.a. Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.

2.b. Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

3. Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).
Sur le schéma ci-dessous on a représenté les droites (AB) et (CD), les points I et J, et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I.
On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I.
On considère un point M' de la droite (CD) distinct du point J.



3.a. Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

3.b. Démontrer que le triangle MPM' est rectangle en P.

3.c. Justifier que MM' > IJ et conclure.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1.a. A(0;0;0) B(10;-8;2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\-8\\2\end{pmatrix}$

(AB) $\begin{cases}x=10t\\y=-8t\\z=2t\end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$

C(-1;-8;5) D(14;4;8) $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}15\\12\\3\end{pmatrix}$

(CD) $\begin{cases}x=15k-1\\y=12k-8\\z=3k+5\end{cases}$ k décrit $\mathbb{R}$

1.b. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

On détermine l'intersection des droites (AB) et (CD).

$$\begin{cases}10t=15k-1\\-8t=12k-8\\2t=3k+5\end{cases}$$

On considère le système constitué des deux premières équations : $\begin{cases}10t-15k=-1\\-8t-12k=-8\end{cases}$.

En utilisant la méthode par addition :

$4\times(10t-15k)+5\times(-8t-12k)=4\times(-1)+5\times(-8) \Leftrightarrow -120k=-44 \Leftrightarrow k=\dfrac{-44}{-120}=\dfrac{11}{30}$

$4\times(10t-15k)-5\times(-8t-12k)=4\times(-1)-5\times(-8) \Leftrightarrow 80t=36 \Leftrightarrow t=\dfrac{36}{80}=\dfrac{9}{10}$

Pour la troisième équation :

$2t=2\times\dfrac{9}{20}=\dfrac{9}{10}$ $3k+5=3\times\dfrac{11}{30}+5=\dfrac{11}{10}+\dfrac{50}{10}=\dfrac{61}{10}\neq\dfrac{9}{10}$

Les droites (AB) et (CD) n'ont pas de point d'intersection, elles ne sont pas sécantes.

Conclusion

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2.a. (AB) $\begin{cases}x=10t\\y=-8t\\z=2t\end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$

L'abscisse de I est 5 donc $5=10t \Leftrightarrow t=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$.

$y=-8\times\dfrac{1}{2}=-4$ et $z=2\times\dfrac{1}{2}=1$

I(5;-4;1)

. (CD) $\begin{cases}x=15k-1\\y=12k-8\\z=3k+5\end{cases}$ k décrit $\mathbb{R}$

L'abscisse de J est 4 donc $4=15k-1 \Leftrightarrow k=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3}$

$y=12\times\dfrac{1}{3}-8=4-8=-4$ et $z=3\times\dfrac{1}{3}+5=1+5=6$

J(4;-4;6)

. $IJ^2=(4-5)^2+(-4+4)^2+(6-1)^2=1+0+25=26$ $IJ=\sqrt{26}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2.b. $\vec{IJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\-8\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}15\\12\\3\end{pmatrix}$

$\vec{IJ}.\overrightarrow{AB}=-1\times10+0\times(-8)+5\times2=-10+10=0$

Les droites (IJ) et (AB) sont orthogonales et sécantes en I donc (IJ) et (AB) sont perpendiculaires.

$\vec{IJ}.\overrightarrow{CD}=-1\times15+0\times12+5\times3=15-15=0$

Les droites (IJ) et (CD) sont orthogonales et sécantes en J donc (IJ) et (CD) sont perpendiculaires.

Conclusion

(IJ) est la perpendiculaire commune à (AB) et (CD).

3.a. Les droites (IJ) et (Δ) sont strictement parallèles donc déterminent un plan (π).

I appartient à (Δ) et J appartient à (CD) donc la droite (IJ) est contenue dans le plan (π).

M' appartient à (CD) donc au plan (π) et la parallèle à (IJ) passant par M' est contenue dans le plan (π).

(Δ) est sécante à (IJ) donc sécante à toute parallèle à (IJ) contenue dans (π).

On note P le point d'intersection de (Δ) et la parallèle à (IJ) passant par M'.

3.b. (IJ) est perpendiculaire à deux droites sécantes : (Δ) et (AB) du plan (IMP) donc (IJ) est perpendiculaire au plan (IMP).

(M'P) est parallèle à (IJ) donc (M'P) est perpendiculaire au plan (IMP).

(M'P) est orthogonale à toute droite contenue dans le plan (IMP) donc (M'P) est perpendiculaire à la droite (MP) et le triangle MPM' est rectangle en P.

3.c. Le quadrilatère IJM'P est un rectangle donc IJ=PM'.

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle MPM'

$MM'^2=PM^2+M'P^2$ donc $MM'^2=PM^2+IJ^2$

$PM\neq0$ donc $MM'^2>IJ^2$

Conséquence

MM' > IJ

Remarque

On aussi vérifier que si M=I et $M'\neq J$ alors MM'>IJ et si $M\neq I$ et M'=J alors MM'>IJ.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés