EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les deux graphiques donnés en annexe seront à compléter et à rendre avec la copie.

Un scooter radio commandé se déplace en ligne droite à la vitesse constante de 1 $m.s^{-1}$.
Il est suivi par un chien qui se déplace à la même vitesse.
On représente la situation vue de dessus dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 mètre. L'origine de ce repère est la position initiale du chien. Le scooter est représenté par un point appartenant à la droite d'équation x=5. Il se déplace sur cette droite dans le sens des ordonnées croissantes.
Dans la suite de l'exercice, on étudie deux modélisations différentes de la trajectoire du chien.

Partie A – Modélisation à l'aide d'une suite

La situation est représentée par le graphique n° 1 donné en annexe.
À l'instant initial, le chien est représenté par le point S_0. Le chien qui le poursuit est représenté par le point M_0. On considère qu'à chaque seconde instantanément en direction du scooter et se déplace en ligne droite sur une distance de 1 mètre.
Ainsi, à l'instant initial, le chien s'oriente en direction du point S_0 et une seconde plus tard il se trouve un mètre plus loin au point M_1. À cet instant, le scooter est au point S_1. Le chien s'oriente en direction de S_1 et se déplace en ligne droite en par courant 1 mètre, et ainsi de suite.
On modélise alors les trajectoires du chien et du scooter par deux suites de points notées (M_n) et (S_n).
Au bout de n secondes, les coordonnées du point S_n sont (5;n). On note $(x_n;y_n)$ les coordonnées du point M_n

1. Construire sur le graphique n°1 donné en annexe les points M_2 et M_3.

2. On note d_n la distance, entre le chien et le scooter n secondes après le début de la poursuite.
On a donc $d_n=M_nS_n$.
Calculer d_0 et d_1.

3. Justifier que le point M_2 a pour coordonnées $\left(1+\frac{1}{\sqrt{17}};\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

4. On admet que, pour entier naturel n :

$$\begin{cases} x_{n+1}= x_n+\dfrac{5-x_n}{d_n} \\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{n-y_n}{d_n} \end{cases}$$

4.a. Le tableau ci-après, obtenu à l'aide d'un tableur, donne les coordonnées des points M_n et S_n, ainsi que la distance d_n en fonction de n.
Quelles formules doit-on écrire dans les cellules C5 et F5 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes C et F ?

	A	B	C	D	E	F
1	n	M_n		S_n		d_n
2		x_n	y_n	5	n	
3	0	0	0	5	0	5
4	1	1	0	5	1	4.12310563
5	2	1.9701425	0.24253563	5	2	3.50267291
6	3	2.83515547	0.74428512	5	3	3.12646789
7	4	3.52758047	1.46577498	5	4	2.93092404
...	...	.....	.....	...	...	.....
28	24	4.99979751	21.2268342	5	24	2.7731658
29	25	4.99987053	22.2288342	5	25	2.7731658

4.b. On admet que la suite (d_n) est strictement décroissante.
Justifier que cette suite est convergente et conjecturer sa limite à l'aide du tableau.

Partie B – Modélisation à l'aide d'une fonction

On modélise maintenant la trajectoire du chien à l'aide de la courbe $\mathscr{F}$ de la fonction f définie pour tout réel de l'intervalle [0;5[par : $f(x)=-\ln(1-0{,}2x)-0{,}5x+0{,}05x^2$.
Cela signifie que le chien se déplace sur la courbe $\mathscr{F}$ de la fonction f.

1. Lorsque le chien se trouve au point M de coordonnées (x;f(x)) de la courbe $\mathscr{F}$, où x appartient à l'intervalle [0;5[, le scooter se trouve au point S, d'ordonnée y_S. Ainsi le point S a pour coordonnées $(5;y_S)$. La tangente à la courbe $\mathscr{F}$ au point M passe par le point S. Cela traduit le fait que le chien s'oriente toujours en direction du scooter. On note d(x) la distance MS entre le chien et le scooter lorsque M a pour abscisse x.

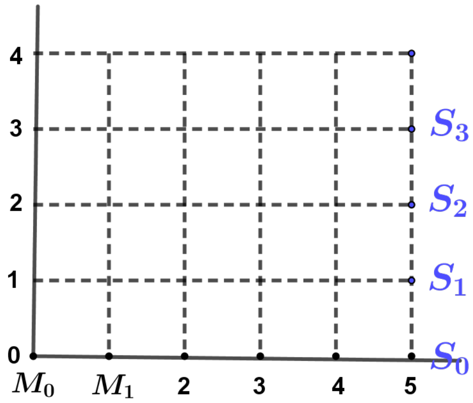
1.a. Sur le graphique 2 donné, en annexe, construire, sans calcul, le point S donnant la position du scooter lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathscr{F}$ et lire les coordonnées du point S.

1.b. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [0;5[et on admet que, pour tout réel x de l'intervalle [0;5[: $f'(x)=\dfrac{x(1-0{,}1x)}{5-x}$.
Déterminer par le calcul une valeur approchée au centième de l'ordonnée du point S lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathscr{F}$.

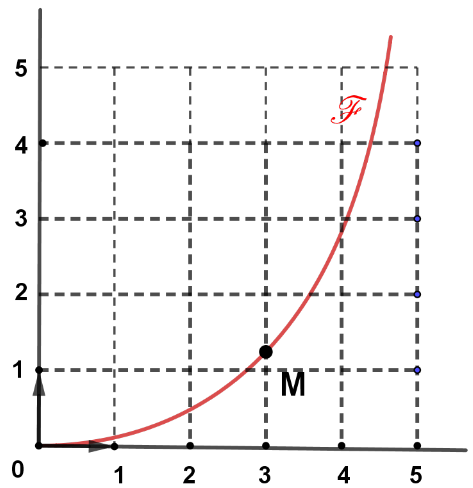
2. On admet que $d(x)=0{,}1x^2-x+5$ our tout réel x de l'intervalle [0;5[.
Justifier qu'au cours du temps la distance MS se rapproche d'une valeur limite que l'on déterminera.

ANNEXE
À rendre avec la copie EXERCICE 4

Partie A, question 1
Graphique n°1



Partie B, question 1
Graphique n° 2



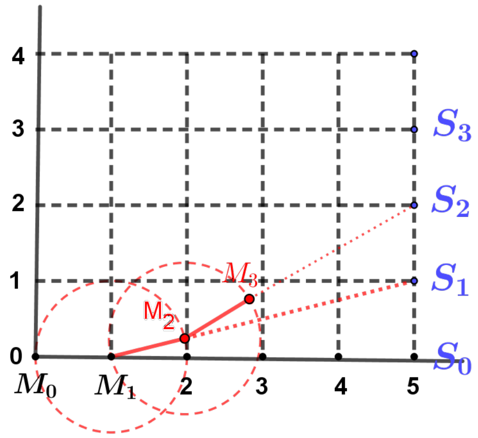
CORRECTION

Partie A – Modélisation à l'aide d'une suite

1. $M_0(0;0)$ $M_1(1;0)$ $S_0(5;0)$ $S_1(5;1)$

Pour construire M_2, on trace le segment $[M_1S_1]$ puis le cercle de centre M_1 et de rayon 1, M_2 est le point d'intersection du segment $[M_1S_1]$ et du cercle de centre M_1 et de rayon 1.

Pour construire M_3, on trace le segment $[M_2S_2]$ puis le cercle de centre M_2 et de rayon 1, M_3 est le point d'intersection du segment $[M_2S_2]$ et du cercle de centre M_2 et de rayon 1.



2. $M_0(0;0)$ $S_0(5;0)$ $d_0^2 = M_0S_0^2 = (5-0)^2+(0-0)^2 = 5^2$ $d_0 = 5$

$M_1(1;0)$ $S_1(5;1)$ $d_1^2 = M_1S_1^2 = (5-1)^2+(1-0)^2 = 16+1 = 17$ $d_1 = \sqrt{17}$

3. On détermine l'équation réduite de (M_1S_1) $M_1(1;0)$ $S_1(5;1)$.

Coefficient directeur de (M_1S_1) : $\dfrac{y_S - y_M}{x_S - x_M} = \dfrac{1-0}{5-1} = \dfrac{1}{4}$

(M_1S_1) : $y = \dfrac{1}{4}x + b$ $M_1(1;0)$ appartient à (M_1S_1) $0 = \dfrac{1}{4}\times 1 + b \Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{4}$

Caractérisation analytique de $[M_1S_1]$

$y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4}$ et $1 \leqslant x \leqslant 5$

Équation du cercle de centre $M_1(1;0)$ et de rayon 1 :

$(x-1)^2+(y-0)^2 = 1^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x = 0$

Intersection de $[M_1S_1]$ et du cercle précédent :

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4} \\ x^2-2x+y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad 1 \leqslant x \leqslant 5$$

On obtient : $x^2-2x+\left(\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+\dfrac{1}{16}x^2+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{8}x = 0 \Leftrightarrow 17x^2-34x+1 = 0$

$\Delta = 34^2-4\times 17 = 4\times 17\times(17-1) = 64\times 17$

$x' = \dfrac{34-8\times\sqrt{17}}{34} < 1$

$x'' = \dfrac{34+8\sqrt{17}}{34} = 1+\dfrac{4}{\sqrt{17}}$ $1 \leqslant x'' \leqslant 5$

$y = \dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)-\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$

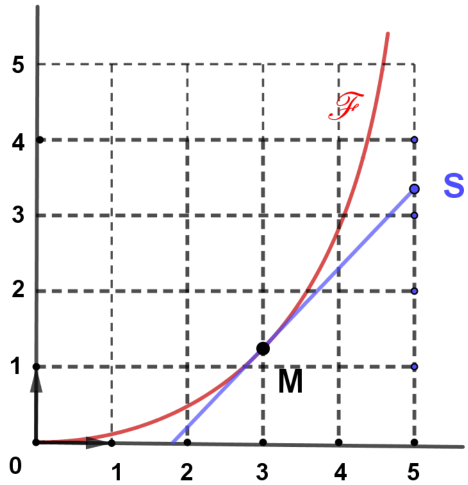
$M_2\left(1+\dfrac{4}{\sqrt{17}};\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$

4.a. En C5 : =B4+(5-B4)/F4
En F5 : =racine((D5-B5)^2+(E5-C5)²)

4.b. (d_n) est une suite strictement décroissante et minorée par 0 donc (d_n) donc (d_n) est une suite convergente, on note L la limite de la suite
Dans le tableau on constate que $d_{28}=d_{29}$, on peut conjecturer que 2,7731658 est une valeur approchée (« assez précise ») de L.

Partie B – Modélisation à l'aide d'une fonction

1.a. On trace à main levée la tangente à la courbe $\mathscr{F}$ au point M d'abscisse 3.



Par lecture graphique S(5;3,3).

1.b. On détermine l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{F}$ au point M d'abscisse 3.

On admet que : $f'(x)=\dfrac{x(1-0,1x)}{5-x}$ donc $f'(3)=\dfrac{3\times 0,7}{2}=1,05$

$f(x)=-2,5\ln(1-0,2x)-0,5x+0,05x^2$

$f(3)=-2,5\ln(0,4)-1,5+0,05\times 9=-2,5\ln(0,4)-1,05$ M(3;f(3))

Équation de la tangente :

$y=1,05x+b$ on a : $-2,5\ln(0,4)-1,05=3,15+b \iff b=-2,5\ln(0,4)-4,2$

$y=1,05x-2,5\ln(0,4)-4,2$

S est le point d'abscisse 5 de cette tangente.

$y=2,25-2,5\ln(0,4)-4,2=1,05-2,5\ln(0,4)=3,34$ à 10^{-2} près.

S(5;3,34)

1,c. Pour tout nombre réel de l'intervalle [0;5[$MS=d(x)=0,1x^2-x+5$

$\lim_{x\to 5} d(x)=0,1\times 25-5+5$ = **2,5**

Remarque

$d'(x)=0,2x-1$ donc d est une fonction décroissante sur [0;5[.