EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols.

Au 1^{er} juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.

On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1^{er} juillet de l'année 2012+n.

Partie A – Un modèle simple

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$\begin{cases} u_{n+1}=1,1\,u_n-2000\,v_n \\ v_{n+1}=2\times 10^{-5}\,u_n+0,6\,v_n= \end{cases}$ pour tout entier $n \geqslant 0$, avec $u_0=2000000$ et $v_0=120$.

1.a. On considère la matrice colonne $U_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1}=A\times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0.

1.b. Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1^{er} juillet 2018.

2. Soit les matrices $P=\begin{pmatrix} 20000 & 5000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}=\dfrac{1}{15000}\begin{pmatrix} 1 & -5000 \\ -1 & 20000 \end{pmatrix}$.

On admet que P^{-1} est la matrice inverse de P et que $A=P\times D\times P^{-1}$

2.a. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n=P\times D^n\times P^{-1}\times U_0$

2.b. Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n.

2.c. On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_n=\dfrac{2,8\times 10^7+2\times 10^6\times 0,7^n}{15} \\ v_n=\dfrac{1400+400\times 0,7^n}{15} \end{cases}$$

Décrire l'évolution des deux populations

Partie B – Un modèle plus conforme à la réalité

Dans la réalité, on observe que si le nombre de renards à suffisamment baissé, alors le nombre de campagnols augmente à nouveau, ce qui n'est pas le cas dans le modèle précédent.

On construit donc un autre modèle, plus précis, qui tient compte de ce type d'observations à l'aide des relations suivantes :

$\begin{cases} u_{n+1}=1,1\,u_n-0,001\,u_n\times v_n \\ v_{n+1}=2\times 10^{-7}\,u_n\times v_n+0,6\,v_n \end{cases}$ pour tout entier $n \geqslant 0$, avec $u_0=2000000$ et $v_0=120$.

Le tableau ci-après présente le nouveau modèle sur les 25 premières années en donnant les effectifs des populations arrondis à l'unité :

	A	B	C
1	Modèle de la partie B		
2	n	u_n	v_n
3	0	2000000	120
4	1	1960000	120
5	2	1920800	119
6	3	1884228	117
7	4	18519045	114
8	5	1825160	111
9	6	1804988	107
10	7	1792049	103
11	8	1786692	99
12	9	1789005	94
13	10	1798854	91
14	11	1815930	87
15	12	1839780	84
16	13	1869827	81
17	14	1905378	79
18	15	1945622	77
19	16	1989620	77
20	17	2036288	76
21	18	2084374	77
22	19	2132440	78
23	20	2178846	80
24	21	2221746	83
25	22	2259109	87
26	23	2288766	91
27	24	2308508	97

1. Quelles formules faut-il écrire dans les cellules B4 et C4 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes B et C ?

2. Avec le deuxième modèle, à partir de quelle année observe-t-on le phénomène décrit (baisse des renards et hausse des campagnols) ?

Partie C

Dans cette partie on utilise le modèle de la partie B.
Est-il possible de donner à u_0 et v_0 des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est à dire telles que pour tout ent naturel n on ait $u_{n+1}=u_n$ et $v_{n+1}=v_n$?
(On parle alors d'état stable).

CORRECTION

Partie A- Un modèle simple

1.a. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1}=1,1\,u_n-2000\,v_n \\ v_{n+1}=2\times10^{-5}+0,6\,v_n \end{cases}$$

En utilisant la notation matricielle

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -2000 \\ 2\times10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Donc $U_{n+1}=A\times U_n$ avec $A=\begin{pmatrix} 1,1 & -2000 \\ 2\times10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix}$

1.b. Pour tout entier naturel n

$U_n=A^n\times U_0$

$2018-2012=6$.

On doit déterminer U_6 .

$U_6=A^6\times U_0$.

On calcule A^6 avec la calculatrice puis U_6 .

On obtient en arrondissant à 10^{-2} près.

$$U_6=\begin{pmatrix} 1882353,20 \\ 96,47 \end{pmatrix}$$

Au 1er juillet 2018, le nombre de campagnols sera de 1 882 353 et le nombre de renards 96.

Remarque

Il est nécessaire pour effectuer les calculs d' avoir un nombre suffisant de décimales.

Car si on prend 4 décimales ou moins alors le coefficient 2×10^{-5} devient **0.**

Pour information nous avons effectué les caculs avec 15 décimales.

2.a. On admet que :

$A=P\times D\times P^{-1}$ et $P\times P^{-1}=P^{-1}\times P=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que pour tout entier naturel n : $U_n=A^n\times U_0$.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n :

$A^n=P\times D^n\times P^{-1}$

Initialisation

Pour n=0, on a : $A^0=I$ et $D^0=I$ donc $P\times D^0\times P^{-1}=P\times I\times P^{-1}=P\times P^{-1}=I$

On obtient : $A^0=P\times D^0\times P^{-1}$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que :

$A^n=P\times D^n\times P^{-1}$ et on doit démontrer que : $A^{n+1}=P\times D^{n+1}\times P^{-1}$.

Or $A^{n+1}=A^n\times A=(P\times D^n\times P^{-1})\times(P\times D\times P^{-1})=P\times D^n\times(P^{-1}\times P)\times D\times P^{-1}=P\times D^n\times\times D\times P^{-1}$

$A^{n+1}=P\times D^n\times D\times P^{-1}=P\times D^{n+1}\times P^{-1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $A^n=P\times D^n\times P^{-1}$.

Conséquence

Pour tout entier naturel n :

$U_n=A^n\times U_0=P\times D^n\times P^{-1}\times U_0$.

2.b. La matrice D est diagonale.

$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0,7\end{pmatrix}$ $\quad D^n=\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & 0,7^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0,7^n\end{pmatrix}$

2.c. Pour tout entier naturel n : $u_n=\dfrac{2,8\times10^7+2\times10^6\times0,7^n}{15}$.

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n=\dfrac{2\times10^6}{15}\times0,7^n$.

(w_n) est la suite géométrique de premier terme $w_0=\dfrac{2\times106}{15}>0$ et de raison $q=0,7$ $(0<0,7<1)$.

Donc la suite (w_n) est une suite décroissante et convergente vers 0.

Pour tout entier naturel n : $u_n=\dfrac{2,8}{15}\times10^7+w_n$ donc la suite (u_n) est une suite décroissante et convergente vers $\dfrac{2,8}{15}\times10^7$.

$\dfrac{2,8}{15}\times10^7$ = 1 866 667 à l'unité près.

Conséquence

Le nombre de campagnols va dimuer d'année en année our devenir voisin de 1866 667.

. Pour tout entier naturel n : $v_n=\dfrac{1400+400\times0,7^n}{15}$.

On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par : $t_n=\dfrac{400}{15}\times0,7^n$.

(t_n) est la suite géométrique de premier terme $t_0=\dfrac{400}{15}$ et de raison $q=0,7$ $(0<0,7<1)$.

Donc la suite (t_n) est une suite décroissante et convergente vers 0.

Pour tout entier naturel n : $v_n=\dfrac{1400}{15}+t_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite décroissante et convergente vers $\dfrac{1400}{15}$.

$\dfrac{1400}{15}$ = 93 à l'unité près.

Conséquence

Le nombre de renards va diminuer d'année en année pour devenir voisin de 93.

Partie B – Un modèle plus conforme à la réalité

1. En B4 : =1,1*B3-0,001*B3*C3
En C4 : =2*10^{-7}*B3*C3+0,6*C3

2. Au 1^{er} **juillet 2021, le nombre de campagnols augmente et le nombre de renards continue de diminuer.**

Partie C

On a l'état stable si et seulement si pour tout entier naturel n : $u_n=u_0$ et $v_n=v_0$ si et seulement si

$u_{n+1}=u_n$ et $v_{n+1}=v_n$ $\Leftrightarrow \begin{cases}1,1\,u_n-0,001\,u_n\times v_n=u_n\\ 2\times10^{-7}u_n\times v_n+0,6\,v_n=v_n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0,1\,u_n-0,001\,u_n\times v_n=0\\ 2\times10^{-7}u_n\times v_n-0,6\,v_n=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}0,001\,u_n(100-v_n)=0\\ 2\times10^{-7}v_n(u_n-2\times10^6)=0\end{cases}$

Si $u_n=0$ alors $v_n=0$

On ne considère pas cette possibilité : 0 campagnols et 0 renard.

Si $v_n = 100$ alors $u_n = 2000000$.

Conclusion

On obtient l'état stable si au 1^{er} juillet 2012 il ya 2 000 000 campagnols et 100 renards.