Exercice 2 4 points

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.
Lors de la repousse on modélise la longueur en centimètre de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.
Cette longueur par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :
$f(x)=10e^{u(x)}$

où u est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $u(x)=-e^{2-\frac{x}{10}}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que pour tout x positif on a $f'(x)=-u(x)e^{u(x)}$.
En déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

2.a. Calculer $f(20)$.
En déduire une estimation , arrondie au millimètre, de la queue du lézard après vingt jours de repousse.
2.b. Selon cette modélisation, peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.
On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.
On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0;+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et

on admet que : $f''(x)=\frac{1}{10}u(x)e^{u(x)}(1+u(x))$.

3.a. Déterminer les variations de f' sur $[0;+\infty[$.
3.b. En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$:

$f(x)=10\mathrm{e}^{u(x)}$ et $u(x)=-\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}$

$(\mathrm{e}^{u(x)})'=u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$

$u'(x)=-\left(-\frac{1}{10}\right)\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}=-\frac{1}{10}u(x)$

donc $f'(x)=10\times\left(-\frac{1}{10}\right)u(x)\mathrm{e}^{u(x)}$

$f'(x)=-u(x)\mathrm{e}^{u(x)}$

$\mathrm{e}^{u(x)}>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur $[0;+\infty[$ est le signe de $-u(x)=\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}>0$

f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2.a. $f(20)=10\mathrm{e}^{u(20)}$ $u(20)=-\mathrm{e}^{2-2}=-\mathrm{e}^{0}=-1$ $\mathrm{e}^{u(20)}=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$

$f(20)=\frac{10}{\mathrm{e}}=$ **3,7 au dixième près.**

La longueur de la queue de lézard au bout de 20 jours est 3,7 cm.

2.b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{x}{10}\right)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\mathrm{e}^{0}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=10$

f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;+\infty[$:

$f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=10$

<u>Conséquence</u>

La queue du lézard ne peut pas mesurer 11 cm.

3.a. Le signe de $f''(x)$ sur $[0;+\infty[$ est le signe de $u(x)\times(1+u(x))$ et $u(x)<0$.

$1+u(x)>0 \Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}>0 \Leftrightarrow 1>\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}} \Leftrightarrow \ln(1)>2-\frac{x}{10} \Leftrightarrow \frac{x}{10}>2 \Leftrightarrow x>20$

Si $0\leqslant x<20$ alors $0<f'(x)$

Si $20<x$ alors $f'(x)<0$

On donne les variations de f' sous la forme d'un tableau

x	0		20		$+\infty$
f ''(x)		+	0	−	
f '(x)		↗		↘	

3.b. $f'(20)$ est le **maximum** de f' **sur** $[0;+\infty[$

<u>Conséquence</u>

La vitesse de croissance de la queue est maximale au bout de 20 jours.