Exercice 3 — 4 points

Deux espèces de tortues endémiques d'une petite île de l'océan pacifique, les tortues vertes et les tortues imbriquées, se retrouvent lors de différents épisodes reproducteurs sur deux des plages de l'île pour pondre . Cette île, étant point de convergence de nombreuses tortues, des spécialistes ont décidé d'en profiter pour recueillir différentes données sur celles-ci.
Ils ont dans un premier temps constaté que les couloirs empruntés dans l'océan par chacune des deux espèces pour arriver sur l'île pouvaient l'être assimilés à des trajectoires rectilignes.
Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ d'unité 100 m.
Le plan $(O;\vec{i};\vec{j})$ représente le niveau de l'eau et on admet qu'un point $M(x;y;z)$ avec $z<0$ se situe dans l'océan.
La modélisation des spécialiste établit que :
. La trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues vertes a pour support la droite D_1 dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x= 3+t \\ y= 6t \\ z= -3t \end{cases}$ avec t réel
. La trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues imbriquées a pour support la droite D_2 dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x= 10k \\ y= 2+6k \\ z= -4k \end{cases}$ avec k réel

1. Démontrer que les deux espèces ne sont jamais amenées à se croiser avant d'arriver sur l'île.

2. L'objectif de cette question est d'estimer la distance minimale séparant ces deux trajectoires .

2.a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\13\\27\end{pmatrix}$ est normal aux droites D_1 et D_2 .

2.b. On admet que la distance minimale entre les droite D_1 et D_2 est la distance HH' où $\overrightarrow{HH'}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{n}$ avec H appartenant à la droite D_1 et H' appartenant à la droite D_2 .
Déterminer une valeur arrondie en mètre de cette distance minimale.
On pourra utiliser les résultats ci-après fournis par un logiciel de calcul formel.

	→ Calcul Formel
↑	Résoudre({10*k-3-t=3*l,2+6*k-6*t=13*l,,-4*k+3*t=27*l},{k,l,t}) → $k=\frac{675}{1814}$ $l=\frac{17}{907}$ $t=\frac{603}{907}$

3. Les scientifiques décident d'installer une balise en mer.
Elle est repérée par le point B de coordonnées (2;4;0).

3.a. Soit M un point de la droite D_1 .
Déterminer le point M tel que la distance BM soit minimale.

3.b. En déduire la distance minimale, arrondie au mètre, entre la balise et les tortues vertes.

CORRECTION

1. D_1 : $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 6t \\ z = -3t \end{cases}$ avec t réel D_1 est la droite de vecteur directeur $\vec{V}_1\begin{pmatrix}1\\6\\-3\end{pmatrix}$ et passant par C_1 (3;0;0).

D_2 : $\begin{cases} x = 10k \\ y = 2+6k \\ z = -4k \end{cases}$ avec k réel D_2 est la droite de vecteur directeur $\vec{V}_2\begin{pmatrix}10\\6\\-4\end{pmatrix}$ et passant par C_2 (0;2;0).

$\vec{V}_1 = a\vec{V}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1=10a \\ 6=6a \\ -3=-4a \end{cases}$ ce système n'admet pas de solution donc les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ ne sont pas colinéaires et les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

$\begin{cases} 3+t = 10k \\ 6t = 2+6k \\ -3t = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-7{,}5t = -3 \\ 6t-4{,}5t = 2 \\ k=0{,}75t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6{,}5t = -3 \\ 1{,}5t = 2 \\ k=0{,}75t \end{cases}$ ce système n'admet pas de solution.

<u>Conclusion</u>

Les droites D_1 et D_2 ne sont pas sécantes donc ne sont pas coplanaires.

Donc les deux espèces ne sont jamais amenées à se croiser avant d'arriver sur l'île.

2.a. $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\13\\27\end{pmatrix}$ $\vec{V}_1\begin{pmatrix}1\\6\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{V}_2\begin{pmatrix}10\\6\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\vec{V}_1 = 3\times1+13\times6+27\times(-3) = 3+78-81 = 0$

Ces deux vecteurs sont orthogonaux donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à D_1.

$\vec{n}.\vec{V}_2 = 3\times10+13\times6+27\times(-4) = 30+78-108 = 0$

Ces deux vecteurs sont orthogonaux donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à D_2.

2.b. <u>Remarque</u>

On nous demande de déterminer la perpendiculaire commune à D_1 et D_2.

H(3+t;6t;-3t) est un point de D_1.

H'(10k;2+6k;-4k) est un point de D_2.

$\overrightarrow{HH'}\begin{pmatrix}10k-3-t\\2+6k-6t\\-4k+3t\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\13\\27\end{pmatrix}$

(HH') est la perpendiculaire commune de D_1 et D_2 si et seulement si $\overrightarrow{HH'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires soit si et seulement s'il existe un nombre réel l tel que $\overrightarrow{HH'} = l\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} 10k-3-t = 3l \\ 2+6k-6t = 13l \\ -4k+3t = 27l \end{cases}$.

Le logiciel de calcul formel nous donne :

$k = \frac{675}{1814}$; $l = \frac{17}{907}$; $t = \frac{603}{907}$

$H'\left(\frac{6750}{1814};2+\frac{6\times675}{1814};-\frac{4\times675}{1814}\right)$ $H'\left(\frac{3375}{907};\frac{3839}{907};-\frac{1350}{907}\right)$

$H\left(3+\frac{603}{907};\frac{6\times603}{907};-\frac{3\times603}{907}\right)$ $H\left(\frac{3324}{907};\frac{3618}{907};-\frac{1809}{907}\right)$

$\overrightarrow{HH'}\begin{pmatrix}\frac{51}{907}\\\frac{231}{907}\\\frac{459}{907}\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\13\\27\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HH'} = \frac{17}{907}\vec{n}$ $\|\vec{n}\|^2 = 3^2+13^2+27^2 = 907$

$HH' = \frac{17}{907}\sqrt{907} = 0{,}56$ à 10^{-2}.

L'unité de longueur est 100 m.

Une valeur arrondie en mètre de la distance minimale HH' est 56 m.

3.a. M(3+t;6t;-3t) B(2;4;0) $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} 1+t \\ -4+6t \\ -3t \end{pmatrix}$

<u>Première méthode</u>

Pour obtenir la distance minimale BM il suffit de déterminer le point B tel que $\overrightarrow{BM}$ soit normal à D_1 donc orthogonal au vecteur $\vec{V}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BM}.\vec{V}_1 = (1+t)\times 1 + (-4+6t)\times 6 - 3t\times(-3) = 1+t-24+36t+9t = 46t-23$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\vec{V}_1$ sont orthogonaux si et seulement si $46t-23=0 \Leftrightarrow t=\frac{23}{46}=\frac{1}{2}=0{,}5$

M(3,5;3;-1,5)

<u>Deuxième méthode</u>

La distance BM est minimale si et seulement si BM^2 est minimal.

$BM^2=(1+t)^2+(-4+6t)^2+(-3t)^2=1+2t+t^2+16-48t+36t^2+9t^2 = 46t^2-46t+17$

$BM^2=f(t)=46t^2-46t+17$

f est une fonction du deuxième degré admettant un minimum.

$f'(t)=2\times 46t-46 \qquad f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}=0{,}5$ et **M(3,5;3;-1,5).**

3.b. $BM^2=1{,}5^2+(-1)^2+1{,}5^2=2{,}25+1+2{,}25=5{,}5$

$BM=\sqrt{5{,}5}=2{,}35$ à 10^{-2} près.

La longueur ,en mètre, de BM est 235 m.