Exercice 4 3 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal : $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D tels que :

$$\begin{cases} z_A+z_C= z_B+z_D \\ z_A+\mathrm{i}z_B=z_C+\mathrm{i}z_D \end{cases}$$

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

CORRECTION

$z_A+z_C=z_B+z_D \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$

$\frac{z_A+z_C}{2}$ est l'affixe du milieu de [AC]

$\frac{z_B+z_D}{2}$ est l'affixe du milieu de [BD]

[AC] et [BD] ont même milieu donc le quadrilatère ABCD est un **parallélogramme.**

$z_A+\mathrm{i}\,z_B=z_C+\mathrm{i}\,z_D \quad \Leftrightarrow \quad z_A-z_C=\mathrm{i}(z_D-z_B)$

donc :

- $|z_A-z_B| = |\mathrm{i}|\times|z_D-z_B|$
  $|z_A-z_C|=AC \qquad |z_D-z_B|=DB \qquad |\mathrm{i}|=1$
  On obtient : AC=DB
  ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont égales donc ABCD est un **rectangle.**
- $\arg(z_A-z_C)=\arg(\mathrm{i}(z_D-z_B)) \quad (2\pi)$
  $(\vec{u};\overrightarrow{CA})=\arg(\mathrm{i})+\arg(z_D-z_B) \quad (2\pi)$
  $(\vec{u};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}+(\vec{u};\overrightarrow{BD}) \quad (2\pi)$
  $(\vec{u};\overrightarrow{CA})-(\vec{u};\overrightarrow{BD})=\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$
  $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$
  Les droites (BD) et (CA) sont perpendiculaires.
  ABCD est un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires donc ABCD est un **carré.**