Exercice 5 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Soit k un réel strictement positif.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_1=k$,et pour tout entier naturel n par : $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}^2}{k\,u_n}$.

On admet que tous les termes de la suite (u_n) existent et sont strictement positifs.

1. Exprimer u_2 , u_3 et u_4 en fonction de k.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes de la suite (u_n) pour deux valeurs de k.
La valeur du réel k est entrée dans la cellule E2

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	n	u(n)				1	n	u(n)			
2	0	1		k=	2.7128188	2	0	1		k=	0.9
3	1	2.7182818				3	1	0.9			
4	2	2.7182818				4	2	0.9			
5	3	1				5	3	1			
6	4	0.1353353				6	4	1.2345679			
7	5	0.0067319				7	5	1.6935088			
8	6	0.0001234				8	6	2.5811748			
9	7	8.315E-07				9	7	4.3712422			
10	8	2.061€-0.9				10	8	8.2252633			
11	9	1.88E--12				11	9	17.196982			
12	10	6.305E-16				12	10	39.949576			
13	11	7.781E-20				13	11	103.11684			
14	12	3.533E-24				14	12	295.7362			
15	13	5.9E-29				15	13	942.40349			
16	14	3.625E-34				16	14	3336.173			

2.a. Quelle formule saisie dans la cellule B4 permet par recopie vers le bas de calculer tous les termes de la suite (u_n) .

2.b. Conjecturer, dans chaque cas, la limite de la suite (u_n) .

Dans la suite , on suppose k=e.

On a donc $u_0=1$, $u_1=e$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}^2}{e\,u_n}$.

3. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n=\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$.

3.a. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_0=1$.

3.b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul la suite (S_n) par $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$.

4.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n=\frac{n(3-n)}{2}$.

4.b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $S_n=\ln(u_n)$.

5.a. Exprimer u_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (u_n) .

5.b. Trouver la plus petite valeur de n telle que $u_n<10^{-50}$ par la méthode de votre choix (écriture d'un algorithme, résolution d'inéquation, etc.)

CORRECTION

1. $u_2=\dfrac{u_1^2}{k\,u_0}=\dfrac{k^2}{k\times 1}=k$ $u_3=\dfrac{u_2^2}{k\,u_1}=\dfrac{k^2}{k\times k}=1$ $u_4=\dfrac{u_3^2}{k\,u_2}=\dfrac{1^2}{k\times k}=\dfrac{1}{k^2}$

2.a. En B4 : =B3^2/(B1*$E2)

2.b. Conjectures

$k=e$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

$k=0{,}9$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

3. Pour tout entier naturel n : $v_n=\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$

3.a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+2})-\ln(u_{n+1})=\ln\left(\frac{u_{n+1}^2}{e\,u_n}\right)-\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1}^2)-\ln(e\,u_n)-\ln(u_{n+1})$$

$$v_{n+1}=2\ln(u_{n+1})-\ln(e)-\ln(u_n)-\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-1=v_n-1$$

Donc (v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_0=\ln(u_1)-\ln(u_0)=\ln(e)-\ln(1)=1$ et de raison $r=-1$.

3.b. Pour tout entier naturel n

$v_n=v_0+nr=1-n$

4. Pour tout entier naturel non nul n : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$.

4.a. On veut déterminer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $S_n=\dfrac{n(3-n)}{2}$.

Initialisation

$S_1=v_0=1$ et $\dfrac{1\times(3-1)}{2}=1$

La propriété est vérifiée pour n=1.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $S_n=\dfrac{n(3-n)}{2}$

et on doit démontrer que $S_{n+1}=\dfrac{(n+1)(3-n-1)}{2}=\dfrac{(n+1)(2-n)}{2}$

$$S_{n+1}=S_n+v_n=\frac{n(3-n)}{2}+1-n=\frac{n(3-n)+2(1-n)}{2}=\frac{3n-n^2+2-2n}{2}=\frac{-n^2+n+2}{2}$$

or $(n+1)(2-n)=2n-n^2+2-n=-n^2+n+2$

donc $S_{n+1}=\dfrac{(n+1)(2-n)}{2}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n, $S_n=\dfrac{n(3-n)}{2}$.

4.b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $S_n=\ln(u_n)$.

Initialisation

$S_1=v_0=1$ $\ln(u_1)=\ln(e)=1$

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que $S_n=\ln(u_n)$ et on doit démontrer que $S_{n+1}=\ln(u_{n+1})$.

On a $S_{n+1}=S_n+v_n=\ln(u_n)+\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)=\ln(u_{n+1})$

Conlusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que, pour tout entier naturel non nul n, $S_n=\ln(u_n)$.

5.a. $S_n=\ln(u_n)=\frac{n(2-n)}{2}$ donc $u_n=e^{\frac{n(3-n)}{2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(3-n)}{2}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

5.b. On veut déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n<10^{-50}$;

Première méthode **Résolution d'une inéquation**

$u_n<10^{-50} \Leftrightarrow e^{\frac{n(3-n)}{2}}<10^{-50} \Leftrightarrow \frac{n(3-n)}{2}<\ln(10^{-50}) \Leftrightarrow \frac{n(3-n)}{2}<-50\ln(10)$

$\Leftrightarrow n(3-n)<-100\ln(10) \Leftrightarrow 0<n^2-3n-100\ln(10)$

On détermine le signe du trinôme $T(n)=n^2-3n-100\ln(10)$

$\Delta=9+400\ln(10)>0$ $n'=\frac{3-\sqrt{\Delta}}{2}<0$ $n''=\frac{3+\sqrt{\Delta}}{2}=16{,}74$ à 10^{-2} près

n étant un entier naturel $T(n)>0 \Leftrightarrow n\geqslant 17$.

La plus petite valeur de n est 17.

Deuxième méthode **Utilisation de la calculatrice**

En complétant les résultats donnés par le tableur

$u_{15}=\frac{3{,}625^2\times10^{-68}}{e\times5{,}9\times10^{-29}}=\frac{3{,}625^2}{e\times5{,}9}\times10^{-39}=8{,}194\times10^{-40}$

$u_{16}=\frac{3{,}625^2\times10^{-80}}{e\times3{,}625\times10^{-34}}=\frac{8{,}194^2}{e\times3{,}625}\times10^{-46}=6{,}814\times10^{-46}$

$u_{17}=\frac{6{,}814^2\times10^{-92}}{e\times8{,}194\times10^{-40}}=\frac{6{,}814^2}{e\times8{,}194}\times10^{-52}=2{,}085\times10^{-52}$

La plus petite valeur de n est 17.

Troisième méthode **Utilisation d'un algorithme avec une programmation en Python**
(On propose un algorithme permettant de retrouver les résultats donner par le tableur).

Programme

```
print('Début de programme')
from math import*
N=1
V=1
B=exp(1)
U=B
while U>10**(-50):
    N=N+1
    A=U
    U=(U*U)/(B*V)
    V=A
    print("N="+str(N),"U="+str(U))
print('Fin de programme')
```


Exécution

```
Début de programme
N=2 U=2.718281828459045
N=3 U=1.0
N=4 U=0.1353352832366127
N=5 U=0.006737946999085468
N=6 U=0.00012340980408667956
N=7 U=8.31528719103568e-07
N=8 U=2.0611536224385583e-09
N=9 U=1.879528816539084e-12
N=10 U=6.305116760146993e-16
N=11 U=7.781132241133803e-20
N=12 U=3.53262857220081e-24
N=13 U=5.900090541597068e-29
N=14 U=3.6251409191435636e-34
N=15 U=8.194012623990528e-40
N=16 U=6.8135568215453116e-46
N=17 U=2.0842828425817562e-52
Fin de programme
```

La plus petite valeur de n est 17.