Exercice 5 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour tout entier naturel n, on note F_n le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fermat. Il est défini par :

$$F_n=2^{2^n}+1$$

Partie A

Pierre de Fermat, leur inventeur, a conjecturé que :

« Tous les nombres de Fermat sont premiers ».

L'objectif est de tester cette conjecture.

1.a. Calculer F_0, F_1, F_2 et F_3 .

1.b. Peut-on en déduire que tous les nombres de Fermat sont premiers ?

2. On considère l'algorithme ci-dessous :

$F \leftarrow 2^{2^5}+1$
N ← 2
Tant que F%N ≠ 0
  N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N

F%N désigne le reste de la division euclidienne euclidienne de F par N

La valeur affichée à la fin de l'exécution est 641.

Que peut-on en déduire ?

Partie B

L'objectif est de prouver que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a $F_n=(F_{n-1}-1)^2+1$.

2. Pour tout entier naturel n, on note :

$$\prod_{i=0}^{n} F_i=F_0\times F_1\times F_2\times\ldots\times F_{n-1}\times F_n$$

Pour n non nul, on a donc : $\prod_{i=0}^{n} F_i=\left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right)\times F_n$

Montrer par récurrence et en utilisant le résultat de la question précédente que pour tout entier naturel non nul on a :

$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i=F_n-2$$

3. Justifier que, pour tous entiers naturels n et m tels $n>m$, il existe un entier naturel q tel que $F_n-qF_m=2$.

4. En déduire que deux nombres de Fermat sont toujours premiers entre eux.

CORRECTION

Partie A

1.a. Pour tout entier naturel n : $F_n=2^{2^n}+1$.

$F_0=2^{2^0}+1=2^1+1=2+1=3$

$F_1=2^{2^1}+1=2^2+1=4+1=5$

$F_2=2^{2^2}+1=2^4+1=16+1=17$

$F_3=2^{2^3}+1=2^8+1=256+1=257$

1.b. **On peut affirmer que les 4 premiers nombres de Fermat sont des nombres premiers mais on ne peut rien affirmer pour les autres nombres de Fermat.**

2. On propose une programmation de l'algorithme en Python et l'exécution de ce programme.

Programme

```
print('Début de progamme')
F=2**32+1
N=2
while F%N>0:
    N=N+1
print(N)
print('Fin de programme')
```

Exécution

```
Début de progamme
641
Fin de programme
```

Conséquence

F_5 **est divisible par 641 donc** F_5 **n'est pas un nombre premier et la conjecture de Pierre Fermat est fausse.**

Partie B

1. n est un entier naturel non nul :

$F_{n-1}=2^{2^{n-1}}+1$ et $F_{n-1}-1=2^{2^{n-1}}$

$(F_{n-1}-1)^2=(2^{2^{n-1}})^2=2^{2^{n-1}\times 2}=2^{2^n}=F_n-1$

Conséquence

$F_n=(F_{n-1}-1)^2+1$

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$\prod_{i=0}^{n-1} F_i=F_n-2$.

Initialisation

Pour n=1 :

$\prod_{i=0}^{1-1} F_i=\prod_{i=0}^{0} F_i=F_0=3$ et $F_1-2=5-2=3$

La propriété est vérifiée pour n=1.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $\prod_{i=0}^{n-1} F_i=F_n-2$

et on doit démontrer que $\prod_{i=0}^{n} F_i=F_{n+1}-2$.

$$\prod_{i=0}^{n} F_i = \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right) \times F_n = (F_n - 2) \times F_n = F_n^2 - 2F_n$$

Or $F_{n+1} = (F_n - 2)^2 + 1 = F_n^2 - 2F_n + 2$

donc $\prod_{i=0}^{n} F_i = F_{n+1} - 2$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2$.

3. n et m sont deux entiers naturels tel que n > m.

Si $n > m$ alors $n-1 \geqslant m$

$F_n - 2 = \prod_{i=0}^{n-1} F_i$

$0 \leqslant m \leqslant n-1$ donc F_m est l'un des facteurs du produit $\prod_{i=0}^{n-1} F_i$.

On nomme q le quotient de ce produit par F_m , q est un entier naturel et $\prod_{i=0}^{n-1} F_i = q F_m$.

Conséquence

$F_n - 2 = q F_m$ soit $F_n - q F_m = 2$

4. Un diviseur commun de F_n et F_m est un diviseur de 2 soit 1 ou 2.

Or pour tout entier naturel n :

$2^n \geqslant 1$ donc 2^{2^n} est un multiple de 2 et $2^{2^n} \equiv 0 \ (2)$ et $F_n \equiv 1 \ (2)$

Tous les nombres de Fermat sont impairs.

Conséquence

Le seul diviseur commun de F_n et F_m est 1, donc F_n et F_m sont premiers entre eux.

Conclusion

Deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.