

EXERCICE 1**5 points**

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises.

On admet que :

- . Parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- . 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- . les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

Partie A

Parmi les arbres abattus, on choisit un arbre au hasard.

On considère les événements suivants :

- . C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- . S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- . E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- . H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.
3. Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,5877.
4. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ?
On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} .

Partie B

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu=4000$ et d'écart-type $\sigma=300$.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 3400 et 4600 arbres sur un hectare donné de cette forêt.
On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} .
2. Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4500 arbres sur un hectare donné de cette forêt.
On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} .

Partie C

L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres.

Sur cette parcelle, on a compté 106 sapins dans un échantillon de 200 arbres. Ce résultat remet-il en cause l'affirmation de l'exploitant ?

CORRECTION

Partie A

1. On note \bar{H} , l'événement : « l'arbre abattu est vendu à une entreprise ».

L'énoncé précise :

- Parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont d'essence secondaire.

Conséquences

$$P(C)=0,3 ; P(S)=0,5 \text{ et } P(E)=1-P(C)-P(S)=1-0,3-0,5=0,2$$

- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins sont vendus aux habitants de la commune donc 54,1 % des chênes et 20 % des sapins sont vendus aux entreprises

Conséquences

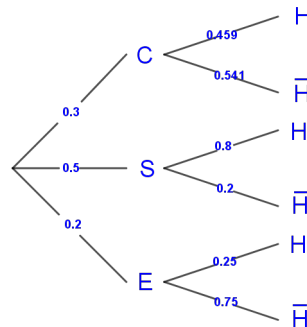
$$P_C(H)=0,459 ; P_S(H)=0,8 ; P_C(\bar{H})=0,541 \text{ et } P_S(\bar{H})=0,2.$$

- Les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises donc un quart des arbres d'espace secondaire sont vendus aux habitants de la commune.

Conséquences

$$P_S(\bar{H})=0,75 \text{ et } P_S(H)=0,25$$

- On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. On nous demande de calculer : $P(C \cap H)$

$$P(C \cap H) = P(C) \times P_C(H) = 0,3 \times 0,459 = \mathbf{0,1377}.$$

3. C ; S et E forment une partition de l'univers.

En utilisant l'arbre pondéré ou la formules des probabilités totales.

$$P(H) = P(C \cap H) + P(S \cap H) + P(E \cap H) = P(C) \times P_C(H) + P(S) \times P_S(H) + P(E) \times P_E(H)$$

$$P(H) = 0,1377 + 0,5 \times 0,8 + 0,2 \times 0,25 = 0,1377 + 0,4 + 0,05 = \mathbf{0,5877}.$$

4. On nous demande de calculer $P_H(S)$

$$P_H(S) = \frac{P(H \cap S)}{P(H)} = \frac{0,4}{0,5877} = \mathbf{0,681 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

Partie B

1. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$P(3400 \leq X \leq 4600) = \mathbf{0,954}.$$

Remarque

$$P(3400 \leq X \leq 4800) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = \mathbf{0,964}.$$

2. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$P(4500 \leq X) = \mathbf{0,048}.$$

Partie C

$$n=200 \geq 30 \quad p=\frac{1}{2}=0,5 \quad np=100 > 5 \quad n(1-p)=100 \geq 5$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de sapins dans la forêt communale au seuil de 95 %

$$\text{est : } I = \left[0,5 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{200}} ; 0,5 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{200}} \right]$$

$$1,96 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{200}} = 0,069$$

$$I = [0,431 ; 0,569]$$

La proportion de sapins dans l'échantillon de 200 arbres est : $f = \frac{106}{200} = 0,53$

0,53 appartient à l'intervalle donc ce résultat ne remet pas en cause l'affirmation de l'exploitant.