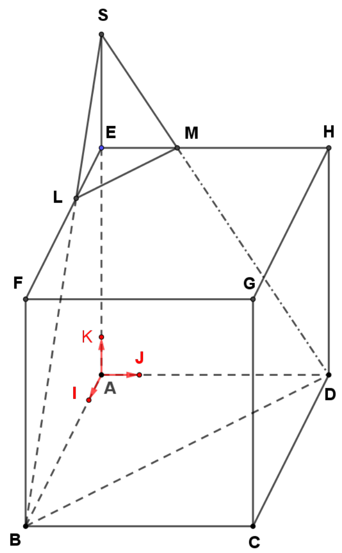
EXERCICE 2 — 5 points

Un artiste souhaite réaliser un sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.
Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A;\vec{AI};\vec{AJ};\vec{AK})$ tel que : $I\in[AB]$, $J\in[AD]$, $K\in[AE]$ et $AI=AJ=AK=1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.
Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

. L est le point tel que $\vec{FL}=\frac{2}{3}\vec{AK}$;

. M est le point d'intersection du plan (BDL) et la droite (EH) ;
. S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2. Démontrer que les coordonnées du point L sont (2;0;6) ;

3.a. Donner une représentation paramétrique de la droite(BL).
3.b. Vérifier que les coordonnées du point S sont (0;0;9).

4. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3;3;2).
4.a. Vérifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BDL).
4.b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est : $3x+3y+2z-18=0$.

4.c. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=6 \end{cases}$ (s décrit $\mathbb{R}$)

Calculer les coordonnées du point M.

5. Calculer le volume du tétraèdre SELM .
On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :
$V=\frac{1}{3}\text{Aire de la base}\times\text{Hauteur}$

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°.

Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

CORRECTION

1. La droite (LM) est contenue dans le plan (EFG), La droite (BG) est contenue dans le plan (ABC).
Les plans (EFG) et (ABC) sont strictement parallèles donc les droites (LM) et (BG) ne sont pas sécantes.
Les droites (LM) et (BG) sont coplanaires car contenues dans le plan (SBD).
Deux droites coplanaires non sécantes sont parallèles donc **les droites (LM) et (BG) sont parallèles.**

2. Le repère $(A;\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AK})$ est orthonormé.
On donne les coordonnées des sommets du cube.
$A(0;0;0)$; $B(6;0;0)$; $C(6;6;0)$; $D(0;6;0)$; $E(0;0;6)$; $F(6;0;6)$; $G(6;6;6)$; $H(0;6;6)$.

$\overrightarrow{FE}(-6;0;0)$ $\quad \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}(-4;0;0)$ $\quad L(x;y;z)$ $\quad \overrightarrow{FL}(x-6;y;z-6)$

$$\overrightarrow{FL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6=-4 \\ y=0 \\ z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=6 \end{cases} \quad \textbf{L(2;0;6)}$$

3.a. B(6;0;0) $\quad$ L(2;0;6) $\quad \overrightarrow{BL}(-4;0;6)$

$$(BL) : \begin{cases} x=-4\times t+6 \\ y=0\times t+0 \\ z=6\times t+0 \end{cases} \quad t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

3.b. A(0;0;0) $\quad \overrightarrow{AK}(0;0;1)$

$$(AK) : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \text{ décrit } \mathbb{R}$$

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (BL) et (AK), on résout le système :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \\ 0=-4t+6 \\ 0=0 \\ \lambda=6t \end{cases} \quad \text{On obtient } t=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \text{ et } \lambda=9$$

Donc **S(0;0;9).**

4.a. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BDL) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDL), par exemples $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BD}$.

$\vec{n}(3;3;2)$ $\quad \overrightarrow{BL}(-4;0;6)$ $\quad \overrightarrow{BD}(-6;6;0)$

$\vec{n}.\overrightarrow{BL}=3\times(-4)+3\times0+2\times6=-12+12=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{BD}=3\times(-6)+3\times6+2\times0=-18+18=0$

donc $\vec{n}$ **est un vecteur normal au plan (BDL).**

4.b. M(x;y;z) appartient au plan (BDL) $\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BM}=0$

$(\ \overrightarrow{BM}(x-6;y;z)\ \ \vec{n}(3;3;2)\ )$

$\Leftrightarrow\ 3\times(x-6)+3\times y+2z=0 \ \Leftrightarrow$ **3x+3y+2z-18=0**

4.c. $$(EH) : \begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=6 \end{cases} \quad s \text{ décrit } \mathbb{R}$$

On résout le système : $$\begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=6 \\ 3x+3y+2z-18=0 \end{cases}$$

On obtient : $3\times 0+3s+2\times 6-18=0 \Leftrightarrow 3s+12-18=0 \Leftrightarrow 3s=6 \Leftrightarrow s=2$
M(0;2;6)

5. SELM est un tétraèdre de base le triangle LEM rectangle en E et de hauteur SE.
EL=EM=2 ES=3.
Aire de la base : $\frac{1}{2}\times 2\times 2=\mathbf{2} \quad (m^2)$
Volume du tétraèdre : $V=\frac{1}{3}\times 2\times 3=\mathbf{2} \quad (m^3)$

6. Le triangle SLE est rectangle en E.
SE=3 et LE=2 $LS^2=SE^2+LE^2=2^2+3^2=4+9=13 \qquad LS=\sqrt{13}$
$\sin\widehat{SLE}=\frac{SE}{LS}=\frac{3}{\sqrt{13}}$
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$\widehat{SLE}$ = **56,31°.**
La contrainte d'angle est bien respectée.

