EXERCICE 3 5 points

Un Publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :

Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=e^{-x}(-\cos(x)+\sin(x)+1)$ et $g(x)=-e^{-x}\cos(x)$.
On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A – Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout nombre réel x.
$-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{-x}$

2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=e^{-x}(2\cos(x)-1)$ où f' est la fonction dérivée de f.

4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

4.a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

4.b. En déduire les variations de f sur $[-\pi;\pi]$.

Partie B – Aire du logo

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

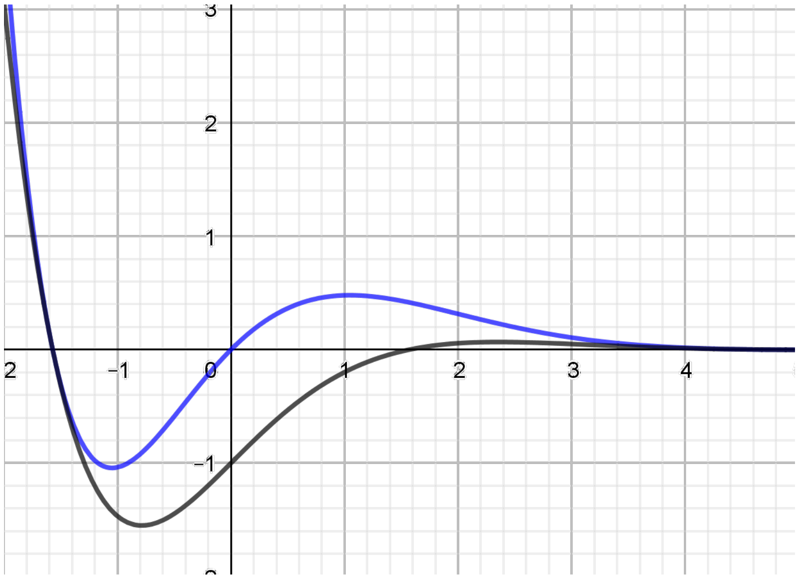
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x)=\left(-\frac{\cos(x)}{2}-\frac{\sin(x)}{2}-1\right)e^{-x}$.

On admet que H est une primitive de la fonction $x \rightarrow (\sin(x)+1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x=-\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{3\pi}{2}$.

2.a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.

2.b. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 .

ANNEXE
À rendre avec la copie



CORRECTION

Partie A – Étude de la fonction f

Pour tout nombre réel x : $f(x)=e^{-x}(-\cos(x)+\sin(x)+1)$

1. Pour tout nombre réel x :

$-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$ et $-1\leqslant-\cos(x)\leqslant 1$ donc $-1-1+1\leqslant-\cos(x)+\sin(x)+1\leqslant 1+1+1$

soit $1\leqslant-\cos(x)+\sin(x)+1\leqslant 3$ on a aussi $e^{-x}>0$.

<u>Conséquence</u>

Pour tout nombre réel x : $e^{-x}\leqslant e^{-x}(-\cos(x)+\sin(x)+1)\leqslant 3e^{-x}$

donc $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 3e^{-x}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ **.**

3. Pour tout nombre réel x.

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ $(\sin(x))'=\cos(x)$ $(\cos(x))'=-\sin(x)$

$f'(x)=(\sin(x)+\cos(x))e^{-x}+(-\cos(x)+\sin(x)+1)(-e^{-x})$

$f'(x)=(\sin(x)+\cos(x)+\cos(x)-\sin(x)+1)e^{-x}$

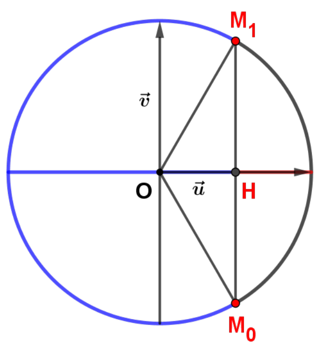
$f'(x)=(2\cos(x)-1)e^{-x}$

4.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-\pi;\pi]$, le signe de $f'(x)$ est le signe de : $2\cos(x)-1$.

$2\cos(x)-1=0 \iff \cos(x)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \left(x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$

$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ on obtient $\left(x=-\frac{\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{\pi}{3}\right)$

Pour résoudre $2\cos(x)-1\geqslant 0$, on trace un cercle trigonométrique.



$(\vec{u};\overrightarrow{OM_0})=\frac{\pi}{3}$ $(\vec{u};\overrightarrow{OM_1})=-\frac{\pi}{3}$ $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=x$ avec $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ donc $\cos(x)\geqslant\frac{1}{2}$ $\iff$

M appartient à l'arc $\overset{\frown}{M_0M_1}$

$\iff -\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$

<u>Conséquences</u>

Si $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$ alors $f'(x)\geqslant 0$.

Si $-\pi\leqslant x<-\frac{\pi}{3}$ alors $\cos(x)<\frac{1}{2}$ et $f'(x)<0$.

Si $\frac{\pi}{3}<x\leq\pi$ alors $\cos(x)<\frac{1}{2}$ et $f'(x)<0$.

4.b. On donne les variations de f sous la forme d'un tableau.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

On peut compléter le tableau pour obtenir le tableau de variation (non demandé dans l'énoncé).

$f(-\pi)=2e^{\pi}=46{,}21$ à 10^{-2} près $\qquad f(\pi)=0$

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=-1{,}04$ à 10^{-2} près $\qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)=0{,}48$ à 10^{-2} près.

Partie B – Aire du logo

1. Pour tout nombre réel x :

$M(x\,;f(x)) \qquad N(x\,;g(x)) \qquad \overrightarrow{NM}(0\,;f(x)-g(x)) \qquad \overrightarrow{NM}(f(x)-g(x))\,\vec{j}$

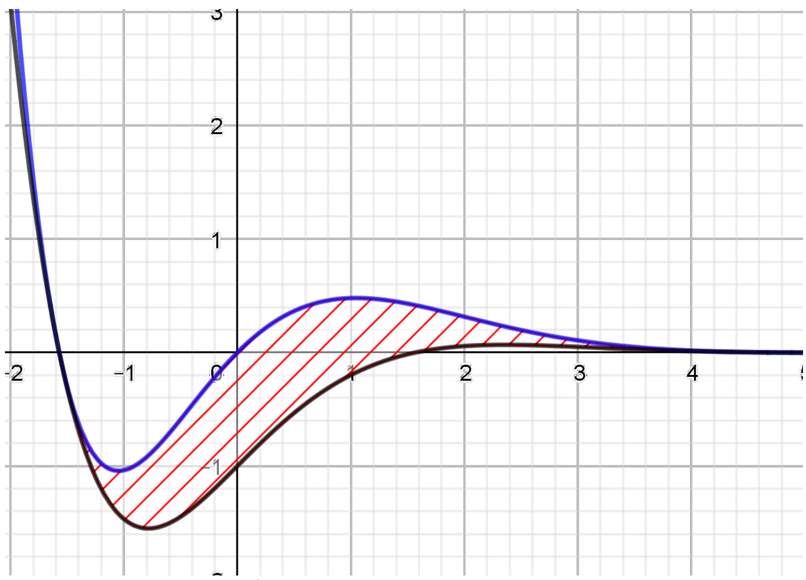
$f(x)-g(x)=e^{-x}(-\cos(x)+\sin(x)+1)-e^{-x}\cos(x)=(\sin(x)+1)e^{-x}$

$-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$ donc $\sin(x)+1\geqslant 0$ et on a $e^{-x}>0$.

Conséquence

Pour tout nombre réel x, $f(x)-g(x)\geqslant 0$ donc **$\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$.**

2.a. On joint la figure complétée.



2.b. L'aire, en unité d'aire, de $\mathscr{D}$ est : $\mathscr{A}=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(f(x)-g(x))\,dx$.

$\mathscr{A}=H\left(\frac{3\pi}{2}\right)-H\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-1\right)e^{\frac{3\pi}{2}}-\left(\frac{1}{2}-1\right)e^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)$

L'unité de longueur est : 2 cm donc l'unité d'aire est égale à : 4 cm^2 . .

$\mathscr{A}=2\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)\ cm^2=9{,}60\ cm^2$ à 10^{-2} près.