EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017, il est inquiet car il sait que le classement de la zone « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.
Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année 2017+n. On a donc $u_0=3000$.

1. Justifier que $u_1=2926$.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0,95\,u_n+76$.

3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	I	J
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n)?

4.a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.

4.b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4.c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-1520$.

5.a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

5.b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=1480\times 0,95^n+1520$.

5.c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que . . .
    n ← . . .
    u ← . . .
Fin de Tant que
```

La notation « ← » correspond à une affectation de valeur, ainsi « n ← 0 » signifie « affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

CORRECTION

1. 1^er^ juin 2017 : $u_0=3000$
31 octobre 2017 : le nombre de cétacés est : 3000+80= **3080.**
1^er^ juin 2018 : le nombre de cétacés (u_1) est : $3080-0,05\times 3080=3080-154=2926$
u_1 **= 2926 .**

2. u_n est le nombre de cétacés au 1^er^ juin 2017+n.
31 octobre 2017+n : le de cétacés est u_n+80
1^er^ juin 2017+n+1 : le nombre de cétacés est $u_{n+1}=u_n+80-0,05\times(u_n+80)=\ 0,95\times u_n+80-4$
$u_{n+1}=0,95\times u_n+76$

3. En C2 il faut écrire : **=0,95xB2+76 .**
Le tableur effectue les calculs avec des nombres décimaux donc il faut configurer le format des cellules pour que soient affichés des nombres arrondis à l'unité.
Remarque : (complément non demandé)
On peut utiliser un programme Python, pour obtenir les résultats du tableau.
Programme

```
print('Début de prgramme')
n=0
u=3000
print("n=o","u=3000")
while (n<=6):
    n=n+1
    u=0.95*u+76
    U=round(u)
    print("n="+str(n),"u="+str(U))
print('Fin de programme')
```

Exécution du programme

```
Début de prgramme
n=o u=3000
n=1 u=2926
n=2 u=2856
n=3 u=2789
n=4 u=2725
n=5 u=2665
n=6 u=2608
n=7 u=2554
Fin de programme
```

4.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant 1520$.
Initialisation
Pour n=0, $u_0=3000\geqslant 1520$.
La propriété est vérifiée pour n=0.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n\geqslant 1520$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\geqslant 1520$.
Or $u_{n+1}=0,95\,u_n+76$.
$u_n\geqslant 1520 \Leftrightarrow 0,95\times u_n\geqslant 0,95\times 1520=1444 \Leftrightarrow 0,95\times u_n+76\geqslant 1444+76=1520$
$\Leftrightarrow u_{n+1}\geqslant 1520$
Conclusion
Le principe de récurrence nous permet de conclure, que pour tout entier naturel n : $u_n\geqslant 1520$.

4.b. Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}-u_n=0,95\,u_n+76-u_n=-0,05\,u_n+76$
Or, $u_n\geqslant 1520 \Leftrightarrow -0,05\,u_n\leqslant -0,05\times 1520=-76 \Leftrightarrow -0,05\,u_n+76\leqslant -76+76=0$

Conséquence

La suite (u_n) est décroissante.

4.c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1520 donc **cette suite est convergente**.

5. Pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 1520$ donc $u_n = v_n + 1520$.

5.a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0{,}95\, u_n + 76 - 1520 = 0{,}95\,(v_n + 1520) - 1444 = 0{,}95\, v_n + 1444 - 1444 = 0{,}95\, v_n$$

(v_n) **est la suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme :** $v_0 = u_0 - 1520$ **=3000-1520=1480.**

5.b. Pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 1480 \times 0{,}95^n \quad \text{et} \quad u_n = v_n + 1520 = 1480 \times 0{,}95^n + 1520 .$$

5.c. $0 \leqslant 0{,}95 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$.

Conséquence

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ **1520.**

6. On complète l'algorithme :

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que u≥2000
    n ← n+1
    u ← 0.95*u+76
Fin de Tant que
```

7. La suite (u_n) est décroissante, $u_0 = 3000$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1520$ donc pour « assez grand » $u_n < 2000$

donc **la réserve marine fermera un jour.**

. Pour déterminer l'année de fermeture, on peut programmer en Python l'algorithme précédent **(méthode non demandée).**

Programme

```python
print('Début de programme')
n=0
u=3000
while(u>=2000):
    u=0.95*u+76
    n=n+1
print("n="+str(n))
```

Exécution

```
Début de programme
n=22
Fin de programme
```

La réserve marine fermera le premier juin 2017+22=2039.

. Pour répondre à la question, on peut résoudre l'inéquation, d'inconnue n, : $u_n < 2000$.

$$u_n < 2000 \Leftrightarrow 1480 \times 0{,}95^n + 1520 < 2000 \Leftrightarrow 1480 \times 0{,}95^n < 2000 - 1520 = 480 \Leftrightarrow 0{,}95^n < \frac{480}{1480} = \frac{12}{37}$$

la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}95^n) < \ln\left(\frac{12}{37}\right) \Leftrightarrow n \times \ln(0{,}95) < \ln\left(\frac{12}{37}\right)$$

$0<0{,}95<1$ donc $\ln(0{,}95)<0$

$\Leftrightarrow \quad n>\ln\left(\frac{12}{37}\right)$: $\ln(0{,}95)=21{,}95$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel

$\Leftrightarrow \quad n\geqslant 22$

<u>Conclusion</u>

La réserve marine fermera le premier juin 2039.