EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre »(le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota »(le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.
On note, pour l'année 2017+n :

- l_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- q_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libre achètent de nouveau une carte de pêche libre l'année suivante ;
- chaque année,45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota achètent une carte de pêche libre l'année suivante ;
- en 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $l_0=0{,}4$ et $q_0=0{,}6$.

On note, pour tout entier naturel n, $P_n=\begin{pmatrix} l_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1}=MP_n$, où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}45 \\ 0{,}35 & 0{,}55 \end{pmatrix}$.

2. Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	M={{0.65,0.45},{0.35,0.55}}
o	√ $M=\begin{pmatrix} 0.65 & 0.45 \\ 0.35 & 0.55 \end{pmatrix}$
2	P_0={{0.4,{0.4}}
o	√ $P_0=\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$
3	Q={{9,1}{7,-1}}
o	√ $Q=\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$
4	T={{1/16,1/16},{1/16,1/16}}
o	√ $T=\begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$

5	TQ
o	→ $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
6	QT
o	→ $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7	D=TMQ
	→ $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

En vous appuyant sur les résultats précédents,répondre aux questions suivantes :

3.a. Justifier que Q est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse.
On notera Q^{-1} la matrice inverse de Q.

3.b. Justifier que $M=QDQ^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $M^n=QD^nQ^{-1}$.

4. On admet que,pour tout entier naturel n non nul, $M^n=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n \\ 7-7\times 0{,}2^n & 7+9+0{,}2^n \end{pmatrix}$

4.a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $P_n=M^nP_0$

4.b. Justifier que, pour tout entier naturel n :
$$l_n=\frac{9}{16}-\frac{13}{80}\times 0{,}2^n$$

5. La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 %?

CORRECTION

On choisit au hasard un pêcheur et on note, pour tout entier naturel n :
L_n l'événement : « le pêcheur achète une carte de pêche libre l'année 2017+n » ;
Q_n l'événement : « le pêcheur achète une carte de pêche quota l'année 2017+n ».
On a $P(L_n)=l_n$ et $P(Q_n)=q_n$.
L'énoncé précise :
. Chaque année, 65 % des pêcheurs possédant la carte de pêche libre achètent de nouveau la carte de pêche libre l'année suivante donc 35 % des pêcheurs possédant la carte de pêche libre une année achètent la carte quota l'année suivante.
Donc $P_{L_n}(L_{n+1})=0{,}65$ et $P_{L_n}(Q_{n+1})=0{,}35$.
. Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche quota achètent la carte libre l'année suivante donc 55 % des possesseurs de la carte quota une année achètent de nouveau la carte quota l'année suivante.
Donc $P_{Q_n}(L_{n+1})=0{,}45$ et $P_{q_n}(Q_{n+1})=0{,}55$.
En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(L_{n+1})=P(L_n\cap L_{n+1})+P(Q_n\cap L_{n+1})=P(L_n)\times P_{L_n}(L_{n+1})+P(Q_n)\times P_{Q_n}(L_{n+1})$
On obtient :
$l_{n+1}=l_n\times 0{,}65+q_n\times 0{,}45=0{,}65\,l_n+0{,}45\,q_n$
On démontre de même :
$q_{n+1}=l_n\times 0{,}35+q_n\times 0{,}55=0{,}35\,l_n+0{,}55\,q_n$
$$P_{n+1}=\begin{pmatrix} l_{n+1}\\ q_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}65\,l_n+0{,}45\,q_n\\ 0{,}35\,l_n+0{,}55\,q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35\\ 0{,}35 & 0{,}55\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_n\\ q_n\end{pmatrix}$$
Donc $P_{n+1}=MP_n$ avec $M=\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}45\\ 0{,}35 & 0{,}55\end{pmatrix}$

2. 2019=2017+2 donc on doit calculer q_2
$$P_1=MP_0=\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}45\\ 0{,}35 & 0{,}55\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}4\\ 0{,}6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}65\times 0{,}4+0{,}45\times 0{,}6\\ 0{,}35\times 0{,}4+0{,}55\times 0{,}6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}26+0{,}27\\ 0{,}14+0{,}33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}53\\ 0{,}47\end{pmatrix}$$
$$P_2=MP_1=\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}45\\ 0{,}35 & 0{,}55\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}53\\ 0{,}47\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}65\times 0{,}53+0{,}45\times 0{,}47\\ 0{,}35\times 0{,}53+0{,}55\times 0{,}47\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}3445+0{,}2115\\ 0{,}1855+02585\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}556\\ 0{,}444\end{pmatrix}$$
<u>Conséquence</u>
q_2 = **0,444.**

3.a. $QT=TQ=I=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

donc la matrice Q est inversible est $Q^{-1}=T$.

3.b. $QD=\begin{pmatrix} 9 & 1\\ 7 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & \frac{1}{5}\\ 7 & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

$$QDQ^{-1}=\begin{pmatrix} 9 & \frac{1}{5}\\ 7 & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16}\\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{52}{80} & \frac{36}{80}\\ \frac{28}{80} & \frac{44}{80}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}45\\ 0{,}35 & 0{,}55\end{pmatrix}=M$$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :
$M^n=QD^nQ^{-1}$
<u>Initialisation</u>
Pour n=1 $M^1=M$ et $QD^1Q^{-1}=QDQ^{-1}$ or $M=QDQ^{-1}$.
La propriété est vérifiée pour n=1.
<u>Hérédité</u>
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que :

$M^n = QD^nQ^{-1}$ et on doit démontrer que : $M^{n+1} = QD^{n+1}Q^{-1}$.

Or $M^{n+1} = MM^n = (QDQ^{-1})(QD^nQ^{-1}) = QD(Q^{-1}Q)D^nQ^{-1} = QDID^nQ^{-1} = QDD^nQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n :

$M^n = QD^nQ^{-1}$

4. On admet que pour tout entier naturel non nul n : $M^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n \\ 7-7\times 0{,}2^n & 7+9\times 0{,}2^n \end{pmatrix}$

4.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n : $P_n = M^nP_0$.

Initialisation

Pour n=o $M^0 = I$ $M^0P_0 = IP_0 = P_0$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $P_n = M^nP_0$ et on doit démontrer que $P_{n+1} = M^{n+1}P_0$.

Or $P_{n+1} = MP_n = M(M^nP_0) = (MM^n)P_0 = M^{n+1}P_0$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $P_n = M^nP_0$.

4.b. $P_n = \begin{pmatrix} l_n \\ q_n \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n \\ 7-7\times 0{,}2^n & 7+9\times 0{,}2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3{,}6+2{,}8\times 0{,}2^n+5{,}5-5{,}4\times 0{,}2^n \\ 2{,}8-2{,}8\times 0{,}2^n+4{,}2+5{,}4\times 0{,}2^n \end{pmatrix}$

$P_n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9-2{,}6\times 0{,}2^n \\ 7+2{,}6\times 0{,}2^n \end{pmatrix}$

donc $l_n = \frac{9}{16} - \frac{2{,}6}{16}\times 0{,}2^n = \frac{9}{16} - \frac{13}{16}\times 0{,}2^n$

5. Pour tout entier naturel n :

$l_{n+1} - l_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0{,}2^{n+1} - \frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0{,}2^n = \frac{13}{80}(-0{,}2+1)\times 0{,}2^n = 0{,}8\times\frac{13}{80}\times 0{,}2^n > 0$

(l_n) est une suite strictement croissante.

$0 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = \frac{9}{16}$

donc pour tout entier naturel n : $l_n \leqslant \frac{9}{16} = 0{,}5625$

Conclusion

La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre sera au plus égale à 56,25 % donc ne dépassera pas 60 %.