Exercice 1 — 5 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-3}.

Partie A

Elsa a préparé un grand saladier de billes de chocolat pour son anniversaire.
On y trouve :
. 40 % de billes de chocolat blanc, les autres étant au chocolat noir ;
. parmi les billes au chocolat blanc, 60 % sont fourrées au café ; les autres sont fourrées au praliné ;
. parmi les billes au chocolat noir, 70 % sont fourrées au café, les autres sont fourrées au praliné.
Un invité prend une bille de chocolat au hasard dans le saladier.
On définit les événements suivants :
. B : « l'invité prend une bille de chocolat blanc » ;
. C : « l'invité prend une bille fourrée au café ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

2. Montrer que la probabilité que l'invité prenne une bille fourrée au café vaut 0,66.

3. Sachant que la bille est fourrée au café, quelle est la probabilité que l'invité ait pris une bille de chocolat blanc ?

Partie B

La société Chococéan commercialise des bonbons au chocolat, qui sont conditionnés en paquets d'environ 250g par une machine. La réglementation exige qu'un tel paquet de bonbons au chocolat ait une masse supérieure à 247,5g.
La dirigeante de l'entreprise constate que, lorsqu'on prélève au hasard un paquet de bonbons au chocolat dans la production, sa masse, en grammes , peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 qui suit une loi normale d'espérance $\mu=251$ et d'écart-type $\sigma=2$.

1. Calculer la probabilité qu'un paquet prélevé au hasard dans la production soit conforme à la réglementation.

2. La dirigeante souhaiterait que 98 % des paquets soient conformes à la réglementation.
Cela nécessite un nouveau réglage de la machine, afin que la masse, en grammes, du paquet prélevé au hasard soit modélisée par une variable aléatoire X_2 qui suit une loi normale d'espérance μ inconnue et d'écart -type $\sigma=2$.
Déterminer la valeur de μ répondant au souhait de la dirigeante.

Partie C

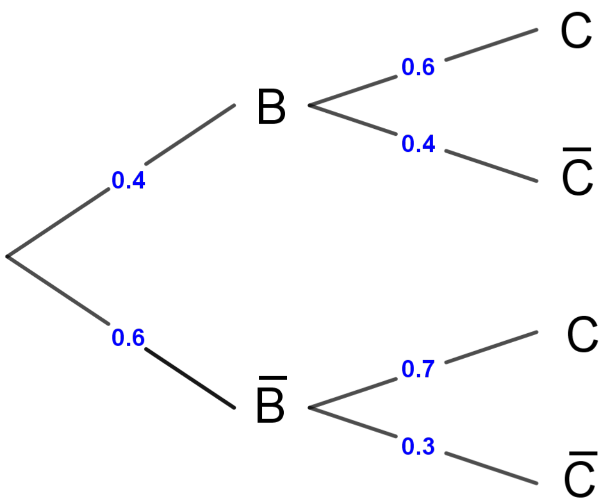
La société procède à un réglage de la machine.
La dirigeante affirme que désormais 98 % des paquets produits sont conformes à la réglementation.
Une association de consommateurs fait peser256 paquets de bonbons au chocolat et en dénombre 248 qui sont conformes à la réglementation.
Le résultat de ce contrôle remet-il en question l'affirmation de la dirigeante ?
Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A

1. On note :
$\bar{B}$: « l'invité prend une bille de chocolat noir » ;
$\bar{C}$: « l'invité prend une bille fourrée au praliné ».

- Le grand saladier contient 40 % de billes de chocolat blanc, les autres étant de chocolat noir donc :
$P(B)=0{,}4$ et $P(\bar{B})=1-0{,}4=0{,}6$
- Parmi les billes de chocolat blanc, 60 % sont fourrées au café, les autres sont fourrées au praliné donc :
$P_B(C)=0{,}6$ et $P_B(\bar{C})=1-0{,}6=0{,}4$
- Parmi les billes de chocolat noir, 70 % sont fourrées au café, les autres sont fourrées au praliné donc :
$P_{\bar{B}}(C)=0{,}7$ et $P_{\bar{B}}(\bar{C})=1-0{,}7=0{,}3$
- On obtient l'arbre de probabilités suivant :



2. En utilisant l'arbre de probabilités ou la formule des probabilités totales.
$P(C)=P(B\cap C)+P(\bar{B}\cap C)=P(B)\times P_B(C)+P(\bar{B})\times P_{\bar{B}}(C)$
$P(C)=0{,}4\times 0{,}6+0{,}6\times 0{,}7=0{,}22+0{,}44=$ **0,66.**

3. On nous demande de calculer $P_C(B)$

$P_C(B)=\dfrac{P(C\cap B)}{P(C)}$

$P(C\cap B)=P(B)\times P_B(C)=0{,}4\times 0{,}6=0{,}24$

$P_C(B)=\dfrac{0{,}24}{0{,}66}=\dfrac{4}{11}=$ **0,364 à 10^{-3} près.**

Partie B

1. X_1 suit la loi normale de paramètres $\mu=251$ et $\sigma=2$
La probabilité qu'un paquet prélevé au hasard dans la production soit conforme à la réglementation est :
$P(247{,}5\leqslant X_1)=$ **0,960 à 10^{-3} près.** (En utilisant la calculatrice)

2. X_2 suit la loi normale de paramètres μ et $\sigma=2$.
On veut déterminer μ tel que $P(247{,}5\leqslant X_2)=0{,}98$

La variable aléatoire $Y=\dfrac{X_2-\mu}{2}$ suit la loi normale réduite et centrée.

On veut déterminer μ tel que $P\left(\frac{247{,}5-\mu}{2}\leqslant Y\right)=0{,}98$.

En utilisant la calculatrice, on détermine le nombre a tel que $P(a\leqslant Y)=0{,}98$.

On obtient $a=-2{,}0537$;

$\frac{247{,}5-\mu}{2}=-2{,}0537$ donc $247{,}5-\mu=-4{,}107$ (à 10^{-3} près)

$\mu = 251{,}607$

Partie C

Le nombre de paquets de bonbons étant très important, on peut considérer que le tirage des 256 paquets est un tirage effectué avec remise.

La taille de l'échantillon est n = 256 la proportion affirmée de paquets de bonbons conformes est p = 0,98.

$n \geqslant 30 \qquad np=250{,}88 \geqslant 5 \qquad n(1-p)=5{,}12 \geqslant 5$.

On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de paquets conformes au seul de 95 %.

$$I=\left[0{,}98-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}98\times 0{,}02}{256}};0{,}98+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}98\times 0{,}02}{256}}\right]$$

$1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}98\times 0{,}02}{256}}=0{,}017$ à 10^{-3} près.

I=[0,98-0,017;0,98+0,017] = [0,963;0,997]

La proportion de paquets conformes dans l'échantillon est : $\frac{248}{256}=0{,}969$ à 10^{-3} près.

Cette valeur appartient à I.

Le résultat de ce contrôle ne remet pas en question l'affirmation de la dirigeante.