Exercice 2 6 points

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x)=(x+2)e^{-x}$.
La courbe représentative de f_2, notée C_2, est tracée dans un repère orthonormé sur l'ANNEXE à rendre avec la copie.
Aucune justification ni aucun calcul ne sont attendus dans cette partie.

1. Conjecturer les limites de f_2 en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Conjecturer le tableau de variations de f_2 à l'aide du graphique.

3. Soit T_2 la tangente à la courbe C_2 au point d'abscisse 0.
Tracer cette tangente sur l'ANNEXE à rendre avec la copie, puis conjecturer une équation par lecture graphique.

4. Sur l'ANNEXE à rendre avec la copie, hachurer un domaine donc l'aire est donnée par l'intégrale :
$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx$.

Partie B

Pour tout réel m, on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x)=(x+m)e^{-x}$ et C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. On admet que f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f'_m sa dérivée.
Montrer que, pour tout réel x, $f'_m(x)=(-x-m+1)e^{-x}$.

3. En déduire les variations de f_m sur $\mathbb{R}$.

4.a. Pour tout réel m, on note T_m la tangente à la courbe C_m au point d'abscisse 0.
Démontrer que T_m a pour équation réduite $y=(1-m)x+m$.
4.b. Démontrer que toutes les droites T_m passent par un même point dont on précisera les coordonnées.

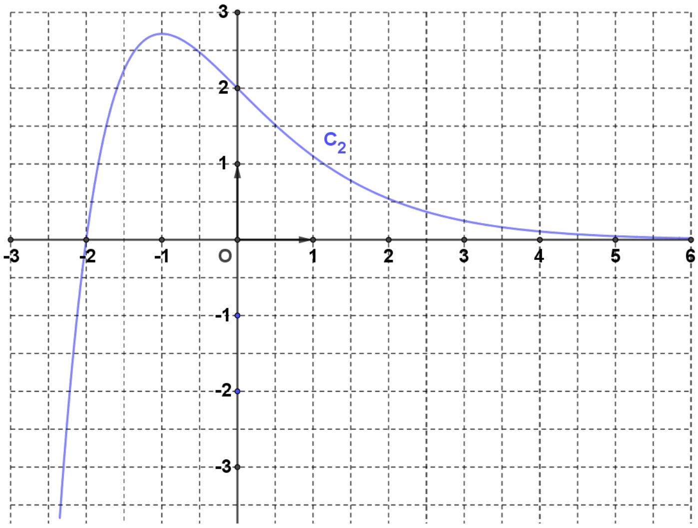
5. Étudier le signe de $f_m(x)$ pour tout réel x.

6. On admet que la fonction F_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $F_2(x)=-(x+3)e^{-x}$ est une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$.

6.a. Déterminer, en fonction de x, l'expression de $\int_{-2}^{x} f_2(t)\,dt$.

6.b. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE



CORRECTION

1. Conjectures :

$\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$

2.

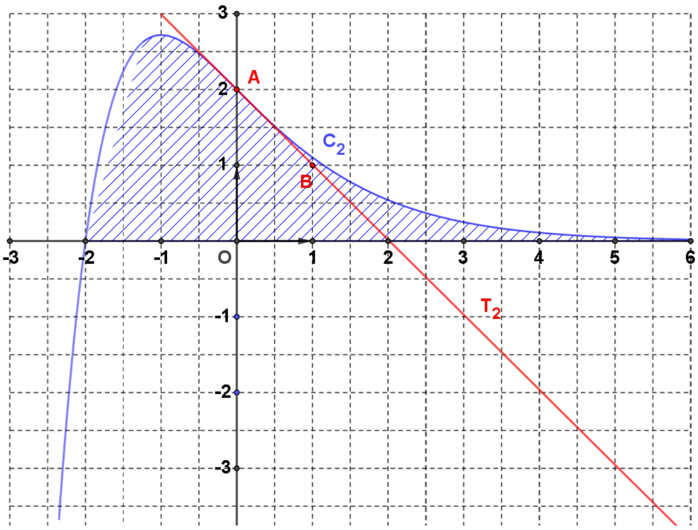
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Par lecture graphique :

f_2 est croissante sur $]-\infty;-1]$ et f_2 est décroissante sur $[-1;+\infty[$.

$f_2(-1)=e$ est le maximum de f_2 .

3.



$f_2(0)=2$

La tangente T_2 passe par les points A(0;2) et B(1;1).

Le cefficient directeur de T_2 est $a=\dfrac{1-2}{1-0}=-1$.

(T_2) **y = -x + 2**

4. $\int_{-2}^{6} f_2(x)\,dx$ est l'aire sous la courbe C_2 sur l'intervalle [-2;6].

Le domaine considéré est hachuré en bleu sur la figure précédente.

Partie B

Pour tout nombre réel m, $f_m(x)=(x+m)e^{-x}$.

1. $\lim_{x \to -\infty} e^{-x}=+\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x+m=-\infty$ donc $\lim_{x \to -\infty} f_m(x)=-\infty$

. $f_m(x)=x e^{-x}+m e^{-x}=\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{m}{e^x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{m}{e^x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=0$.

2. f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ $\quad (x+m)'=1$

On dérive un produit :

$f'_m(x)=1\times e^{-x}+(x+m)\times(-e^{-x})=(-x-m+1)e^{-x}$

3. Pour tout nombre réel x, $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'_m(x)$ est le signe de $(-x-m+1)$.

$-x-m+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-m=x$

$-x-m+1>0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-m>x$

$-x-m+1<x \quad\Leftrightarrow\quad 1-m<x$

$f_m(1-m)=e^{m-1}$

Tableau de variations

x	$-\infty$		$1-m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	$-\infty$	↗	e^{m-1}	↘	0

4.a. T_m est la tangente à la courbe C_m au point $A_m(0;f_m(0))$ $\quad f_m(0)=m$.

T_m est la droite passant le point A_m et de coefficient directeur $f'_m(0)=1-m$

$T_m\ :\ y-m=(1-m)(x-0)$ $\quad T_m\ :\ y=(1-m)x+m$

4.b. Pour $m=1$ $\quad T_1\ :\ y=1$

Pour $m=2$ $\quad T_2\ :\ y=-x+2$

On détermine les coordonnées du point d'intersection de T_1 et T_2 .

$1=-x+2 \quad\Leftrightarrow\quad x=1$ et $y=1$.

Le point d'intersection de T_1 et T_2 est le point $B(1;1)$.

Pour vérifier que toutes les droites T_m passent par un même point, il suffit de vérifier que toutes les droites T_m passent par B.

$T_m\ :\ y=(1-m)x+m$ pour $x=1$ $\quad y=(1-m)\times1+m=1-m+m=1$.

Donc **toutes les droites** T_m **passent par B(1;1).**

5. Pour tout nombre réel x, $f_m(x)=(x+m)e^{-x}$ et $e^{-x}>0$ donc le signe de $f_m(x)$ et le signe de (x+m).

Si $x<-m$ alors $f_m(x)<0$

Si $x=-m$ alors $f_m(-m)=0$

Si $x>-m$ alors $f_m(x)>0$

6.a. $\int_{-2}^{x} f_2(t)\,dt=F_2(x)-F_2(-2)=-(x+3)e^{-x}+e^2$

En utilisant le même raisonnement que la question 1., on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}F_2(x)=0$.

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-2}^{x} f_2(x)\,dx=e^2$