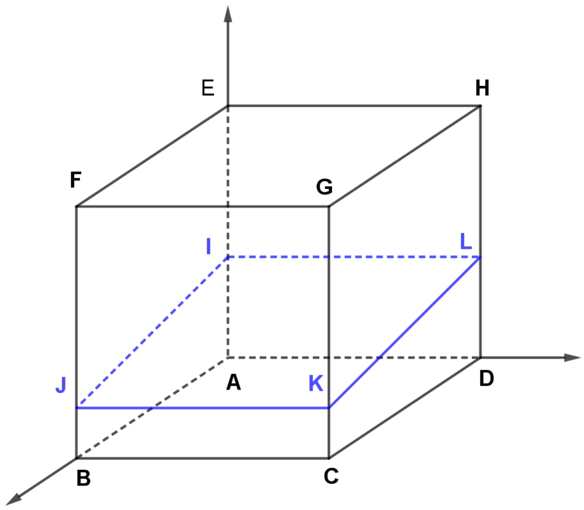
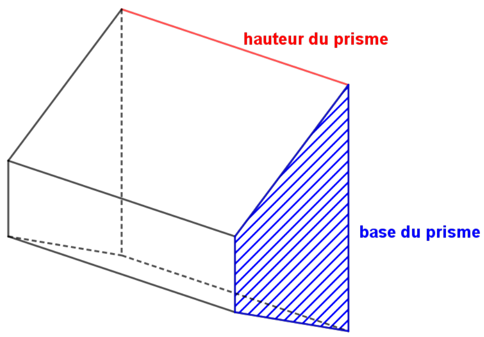
## Exercice 3 — 4 points

On considère un cube ABCDEFGH.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)$.
La figure est donnée ci-dessous.




On rappelle les formules suivantes :

**Aire d'un trapèze:**
$\frac{1}{2}$ **(petite base + grande base)x hauteur**
**Volume d'un prisme:**
**aire de la base x hauteur**




.On note $P_1$ le plan d'équation $4x+15z-9=0$.
La section IJKL du cube ABCDEFGH par le plan $P_1$ est représentée sur la figure

**1.** Déterminer les coordonnées des points I et J.

**2.** Le plan $P_1$ partage le cube en deux prismes.
Calculer le volume de chacun de ces deux prismes.

**3.** Soit M un point du segment [EI].
On cherche un plan $P_2$ parallèle à $P_1$ et passant par M qui partage le cube en deux prismes de même volume.
Déterminer une équation cartésienne de $P_2$.

**CORRECTION**

**1.** $P_1 : \ 4x+15z-9=0$

(AE) est la droite passant par A(0;0;0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

On obtient pour représentation paramétrique de (AE) : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$.

Pour déterminer les coordonnées du point I, on effectue la résolution du système : $\begin{cases} 4x+15z-9=0 \\ x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

On obtient : $15t-9=0 \Leftrightarrow t=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}=0{,}6$

**I(0;0;0,6)**

. (BF) est la droite passant par B(1;0;0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

On obtient pour représentation paramétrique de (BF) : $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=s \end{cases}$ s décrit $\mathbb{R}$

Pour déterminer les coordonnées du point J, on effectue la résolution du système : $\begin{cases} 4x+15z-9=0 \\ x=1 \\ y=0 \\ z=s \end{cases}$

On obtient : $4+15s-9=0 \Leftrightarrow 15s=5 \Leftrightarrow s=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

**J(1;0 ; $\frac{1}{3}$)**

**2.** On considère le prisme EFGHIJKL.
La base est un trapèze EFJI.
La petite base est $EI=1-0{,}6=0{,}4$.
La grande base est $JF=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
La hauteur du trapèze est $EF=1$
L'aire du trapèze est égale à $\frac{1}{2}\times\left(0{,}4+\frac{1}{3}\right)\times 1=0{,}2+\frac{1}{3}=\frac{1{,}6}{3}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$
La hauteur du prisme est $EH=1$.
Le volume du prisme est $V_1=\frac{8}{15}\times 1=\frac{8}{15}$ (unité de volume).
Le volume du cube ABCDEFGH est 1 (unité de volume).
Donc le volume du prisme ABCDIJKL est $1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$ (unité de volume).

**3.** Le plan $P_2$ est parallèle à $P_i$ donc $P_2 : \ 4x+15z+k=0$ où k est un nombre réel à déterminer.

M est le point d'intersection de $P_2$ est de la droite (AE) : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$.

$15t+k=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=-\frac{k}{15} \qquad M\left(0;0:-\frac{k}{15}\right)$

$E(0;0;1)$ donc $ME=1+\frac{k}{15}$ .

N est le point d'intersection de $P_2$ est la droite (BF) : $\begin{cases} x= 1 \\ y= 0 \\ z=s \end{cases}$ s décrit $\mathbb{R}$

$4+15s+k=0 \quad \Leftrightarrow \quad s=\frac{-4-k}{15} \qquad N\left(1;0;\frac{-4-k}{15}\right)$

$F(1;0;1)$ donc $NF=1+\frac{4+k}{15}$

L'aire du trapèze EFNM est égale : $\frac{1}{2}(ME+NF)\times EF=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{15}+1+\frac{4+k}{15}\right)\times 1=1+\frac{2+k}{15}$

On note MNOP la section du cube par le plan $P_2$ .

Le volume du prisme EFGHMNOP est $\left(1+\frac{2+k}{15}\right)\times 1=1+\frac{2+k}{15}$ .

Le plan $P_2$ Partage le cube ABCDEFGH en deux prisme de même volume si et seulement si le volume du prisme EFGHMNOP est égal à $\frac{1}{2}$ .

$1+\frac{2+k}{15}=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2+k}{15}=-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4+2k=-15 \quad \Leftrightarrow \quad 2k=-19 \quad \Leftrightarrow \quad k=-\frac{19}{2}=-9,5$

<u>Conclusion</u>

$P_2$ **: 4x+15z-9,5 = 0.**