Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=e\times\sqrt{u_n}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$1 \leqslant u_n \leqslant e^2$

2.a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2.b. En déduire la convergence de la suite (u_n)

3. Pour tout entier naturel n, on pose :
$v_n=\ln(u_n)-2$

3.a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3.b. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$v_n=-\frac{1}{2^{n-1}}$$

3.c. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
3.d. Calculer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n), si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0.
Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.
Affirmation 1 : « Si $u_0=2018$ alors la suite (u_n) est croissante ».
Affirmation 2 : « Si $u_0=2$ alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant e^2$ ».
Affirmation 3 : « la suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0=0$ ».

CORRECTION

(u_n) est la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $i \leqslant u_n \leqslant e^2$

Initialisation

$u_0=1$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant e^2$.

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose $1 \leqslant u_n \leqslant e^2$ et on doit démontrer que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant e^2$.

La fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.

Si $1 \leqslant u_n \leqslant e^2$ alors $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{e^2}$ soit $1 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant e$.

On obtient : $e\times 1 \leqslant e\times\sqrt{u_n} \leqslant e\times e$ soit $e \leqslant u_{n+1} \leqslant e^2$ or $1 \leqslant e$ donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant e^2$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant e^2$.

2.a. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=e\sqrt{u_n}-(\sqrt{u_n})^2=\sqrt{u_n}(e-\sqrt{u_n})$$

Nous avons vu dans la question précédente que $1 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant e$ donc $e-\sqrt{u_n} \geqslant 0$

Conséquence

$u_{n+1}-u_n \geqslant 0$ soit $u_{n+1} \geqslant u_n$ et **la suite (u_n) est croissante.**

2.b. *Toute suite croissante et majorée est convergente.*

Or la suite (u_n) est croissante et majorée par e^2 donc **la suite (u_n) est convergente.**

3. Pour tout entier naturel n, $v_n=\ln(u_n)-2$.

3.a. Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1})-2=\ln(e\times\sqrt{u_n})-2=\ln(e)+\ln(\sqrt{u_n})-2=1+\frac{1}{2}\ln(u_n)-2=\frac{1}{2}\ln(u_n)-1$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}(\ln(u_n)-2)=\frac{1}{2}v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3.b. $v_0=\ln(u_0)-2=\ln(1)-2$

Pour tout entier naturel n,

$$v_n=v_0\times q^n=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=-2\times\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

3.c. $v_n=\ln(u_n)-2 \Leftrightarrow \ln(u_n)=2+v_n \Leftrightarrow \ln(u_n)=2-\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow$

$$u_n=e^{\frac{2^n-1}{2^{n-1}}}$$

3.d. $\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1}=+\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=e^2$.

4. Affirmation 1 : FAUSSE

Justification

$u_0=2018$ $u_1=e\sqrt{2018}=122{,}11$ à 10^{-2} près.

$u_0 > u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas croissante.

. **Affirmation 2 :** VRAIE

Justification

Si on effectue un raisonnement par récurrence :

$u_0=2$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant e^2$

La propriété est vérifiée pour n=0.

L'hérédité est démontrée à la question 1.

On peut donc conclure que l'affirmation 2 est vraie.

. **Affirmation 3 :** FAUSSE

Justification

On détermine les valeurs de u_0 pour lesquelles $u_1=u_0$.

$e\sqrt{u_0}=u_0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{u_0})^2-e\sqrt{u_0}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{u_0}(\sqrt{u_0}-e)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (u_0=0 \quad \text{ou} \quad u_0=e^2)$

Si $u_0=0$ alors la suite (u_n) est la suite nulle.

Si $u_0=e^2$ alors la suite (u_n) est la suite constante égale à e^2 .