Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n+1$.
On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier .

1. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

2. Démontrer que les termes de la suite sont alternativement pairs et impairs.

3. L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier.
Affirmation : « Si p est un nombre premier impair, alors u_p est premier ».

4.a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2u_n=3^n-1$.
4.b. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que 3^n est congru à 1 modulo 7.
4.c. En déduire que u_{2022} est divisible par 7.

5.a. Calculer le reste de la division euclidienne de chacun des 5 premiers termes de la suite (u_n) .
5.b. Sans justification, recopier et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de 3m+1 par 5					

5.c. En déduire que, pour tout entier naturel n, si u_n est congru à 4 modulo 5 alors u_{n+4} est congru à 4 modulo 5.
5.d. Existe-t-il un entier naturel n tel que le reste de la division euclidienne de u_n par 5 soit égal à 2 ?

CORRECTION

La suite (u_n) est définie par u_0 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n+1$.
On admet que pour tout entier naturel n, u_n est un entier.

1. Pour tout entier naturel n, non nul on a : $1\times u_{n+1}-3\times u_n=1$ donc le théorème de Bezout nous permet d'affirmer que les entiers u_n et u_{n+1} **sont premiers entre eux.**

2. $3\equiv 1\ (2)$ donc $u_{n+1}\equiv u_n+1\ (2)$
Si u_n **est pair** alors $u_n\equiv 0\ (2)$ et $u_{n+1}\equiv 1\ (2)$ donc u_{n+1} **est impair.**
Si u_n **est impair** alors $u_n\equiv 1\ (2)$ et $u_{n+1}\equiv 0\ (2)$ donc u_{n+1} **est pair.**

3. Affirmation : « Si p est un nombre premier impair alors u_p est un nombre premier ».
Affirmation : FAUSSE
Justification
On calcule les premiers termes de la suite :
$u_0=0$; $u_1=1$; $u_2=4$; $u_3=13$ (nombre premier) ; $u_4=40$; $u_5=121=11^2$ (nombre non premier).

4.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $2u_n=3^n-1$.
Initialisation
Pour $n=0$, $u_0=0$ donc $2u_0=0$ et $3^0=1$ et $3^0-1=0$ donc $2u_0=3^0-1$
La propriété est vérifiée pour $n=0$.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $2u_n=3^n-1$ et on doit démontrer que $2u_{n+1}=3^{n+1}-1$.
Or $2u_{n+1}=2(3u_n+1)=3\times 2u_n+2=3\times(3^n-1)+2=3\times 3^n-3+2=3^{n+1}-1$
Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a $2u_n=3^n-1$.

4.b. $3^1\equiv 3\ (7)$
$3^2\equiv 2\ (7)$ car $3^2=9=1\times 7+2$
$3^3\equiv 6\ (7)$ car $3\times 2=6$
$3^4\equiv 4\ (7)$ car $3\times 6=18=2\times 7+4$
$3^5\equiv 5\ (7)$ car $3\times 4=12=1\times 7+5$
$3^6\equiv 1\ (7)$ car $3\times 5=15=2\times 7+1$
6 est le plus petit entier naturel non nul n tel que $3^n\equiv 1\ (7)$

4.c. $2022=6\times 337$ $3^{2022}=(3^6)^{337}$
$3^{2022}\equiv 1^{337}\ (7)$
$3^{2022}\equiv 1\ (7)$
$2u_{2022}=3^{2022}-1$
$2u_{2022}\equiv 1-1\ (7)$
$2u_{2022}\equiv 0\ (7)$

Il existe un entier k tel que $2u_{2022}=7\times k$
2 et 7 sont premiers entre eux donc le théorème de Gauss nous permet d'affirmer que **7 divise** u_{2022}

5.a. $u_0=0$ donc 0 est le reste de la division euclidienne de u_0 par 5
$u_1=1$ donc 1 est le reste de la division euclidienne de u_1 par 5
$u_2=4$ donc 4 est le reste de la division euclidienne de u_2 par 5

$u_3=13=2\times5+3$ donc 3 est le reste de la division euclidienne de u_3 par 5
$u_4=40=8\times5+0$ donc 0 est le reste de la division euclidienne de u_4 par 5

5.b.

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de 3m+1 par 5	1	4	2	0	3

5.c. Pour tout entier naturel n tel que $u_n\equiv4\ (5)$ alors $u_{n+1}\equiv3\ (5)$ et $u_{n+2}\equiv0\ (5)$ et $u_{n+3}\equiv1\ (5)$ et $u_{n+4}\equiv4\ (5)$

5.d. **Réponse :** NON

Justification non demandée

Si on suppose qu'il existe un entier naturel N tel que le reste de la division euclidienne de u_N par 5 est égal à 2 alors , en utilisant le tableau de la question 5.b., on obtient que le reste de la division euclidienne de $u_{N+1}=3u_N+1$ par 5 soit égal à 2.

On peut donc justifier en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier $n\geqslant N$ on a le reste de division euclidienne de u_n par 5 égal à 2.

D'autre part on a démontrer dans la question 5.c. que si le reste de la division euclidienne de u_n par 5 est 4 alors le reste de la division euclidienne de u_{n+4} par 5 est aussi égal à4.

Sachant que le reste de la division euclidienne de u_2 par 5 est égal à 4, on peut justifier en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel p le reste de la division euclidienne de u_{2+4p} par 5 est égal à 4.

On effectue la division euclidienne de N par 4 $N=4q+r$ $0\leqslant r<4$ donc $N<4(q+1)$ et le reste de la division euclidienne de $u_{4(q+1)+2}$ est 4 et non 2.

Conclusion

Il y a contradiction avec l'hypothèse faite donc **il n'existe pas un entier naturel N tel que le reste de la division euclidienne de u_N par 5 soit égal à 2.**