Exercice 1 5 points

Une ferme aquatique exploite une population de crevettes qui évolue en fonction de la reproduction naturelle et des prélèvements effectués.

La masse initiale de cette population de crevettes est estimée à 100 tonnes.

Compte tenu des conditions de reproduction et de prélèvement, on modélise la masse de la population de crevettes, exprimée en tonne, en fonction du temps, exprimé en semaine, par la fonction f_p définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f_p(t)=\dfrac{100p}{1-(1-p)e^{-pt}}$ où p est un paramètre strictement compris entre 0 et 1 et qui dépend des différentes conditions de vie et d'exploitation des crevettes.

1. Cohérence du modèle

1.a. Calculer $f_p(0)$.

1.b. On rappelle que $0 < p < 1$.

Démontrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $1-(1-p)e^{-pt} \geqslant p$

1.c. En déduire que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $0 < f_p(t) \leqslant 100$.

2. Étude de l'évolution lorsque p=0,9.

Dans cette question, on prend p=0,9 et on étudie la fonction $f_{0,9}$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f_{0,9}(t)=\frac{90}{1-0,1e^{-0,9t}}$$

2.a. Déterminer les variations de la fonction $f_{0,9}$.

2.b. Démontrer pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $f_{0,9}(t) \geqslant 90$.

2.c. Interpréter les résultats des questions 2.a. et 2.b dans le contexte.

3. Retour au cas général.

On rappelle que $0 < p < 1$.

Exprimer en fonction de p la limite de f_p lorsque t tend vers $+\infty$.

4. Dans cette question, on prend $p=\dfrac{1}{2}$.

4.a. Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $H(t)=100\ln\left(2-e^{-\frac{t}{2}}\right)+50t$ est une primitive de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ sur cet intervalle.

4.b. En déduire la masse moyenne de crevettes lors des 5 premières semaines d'exploitation, c'est à dire la valeur moyenne de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ sur l'intervalle [0;5].

En donner une valeur approchée arrondie à la tonne.

CORRECTION

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$: $f_p(t)=\dfrac{100p}{1-(1-p)e^{-pt}}$

1. Cohérence du modèle

1.a. $f_p(0)=\dfrac{100p}{1-(1-p)e^0}=\dfrac{100p}{p}=$ **100**

(La masse initiale de cette population de crevettes est estimée à 100 tonnes).

1.b. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on a $0 < p < 1$ donc $0 \leqslant pt \leqslant t$ et $0 \geqslant -pt \geqslant -t$

La fonction exponentielle est croissante sur $[0;+\infty[$

$e^0 \geqslant e^{-pt} \geqslant e^{-t}$ donc $1 \geqslant e^{-pt}$

Or $1-p > 0$ donc $(1-p)\times 1 \geqslant (1-p)e^{-pt}$ et $-(1-p) \leqslant -(1-p)e^{-pt}$

On obtient : $1-(1-p) \leqslant 1-(1-p)e^{-pt}$ soit $p \leqslant 1-(1-p)e^{-pt}$

1.c. $p > 0$ donc $\dfrac{1}{p} \geqslant \dfrac{1}{1-(1-p)e^{-pt}}$

$100p > 0$ donc $\dfrac{100p}{p} \geqslant \dfrac{100p}{1-(1-p)e^{-pt}}=f_p(t)$ soit $100 \geqslant f_p(t)$

$100p > 0$ et $1-(1-p)e^{-pt} \geqslant p > 0$ donc $f_p(t) > 0$

Conclusion

$0 < f_p(t) \leqslant 100$.

2. Étude de l'évolution lorsque p=0,9

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$: $f_{0,9}(t)=\dfrac{90}{1-0,1e^{-0,9t}}$

2.a. $f_{0,9}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$

$(e^{-0,9t})'=-0,9e^{-0,9t}$ donc $(1-0,1e^{-0,9t})'=0,9e^{-0,9t}$ et $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=\dfrac{-v'}{v^2}$

$f'_{0,9}(t)=90\times\left(\dfrac{-0,9e^{-0,9t}}{(1-0,1e^{-0,9t})^2}\right)<0$

$f_{0,9}$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

2.b. $\lim\limits_{t\to+\infty} -0,9t=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,9t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f_{0,9}(t)=\dfrac{90}{1-0}=90$

Tableau de variation

t	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'_p(t)$	$-$
$f_p(t)$	100 $\searrow$ 90

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$ $f_{0,9}(t)$ appartient à l'intervalle [90;100]

donc pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f_{0,9}(t) \geqslant 90$.

2.c. La masse de la population de crevettes,en tonne, diminue dans le temps mais reste supérieure à 90 tonnes.

3. Retour au cas général

$0 < p < 1$ $\lim\limits_{t\to+\infty} -pt=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-pt}=0$

Conséquence

$$\lim_{t\to+\infty} f_p(t)=100\,p$$

4. Pour cette question on prend $p=\frac{1}{2}$

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$

$$f_{\frac{1}{2}}(t)=\frac{50}{2-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}}=\frac{100}{2-e^{-\frac{t}{2}}}$$

4.a. Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$:

$$H(t)=100\ln\left(2-e^{-\frac{t}{2}}\right)+50\,t$$

H est dérivable sur $[0;+\infty[$

$$H'(t)=\frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}}{2-e^{\frac{t}{2}}}+50=\frac{50\,e^{-\frac{t}{2}}+100-50\,e^{-\frac{t}{2}}}{2-e^{-\frac{t}{2}}}=\frac{100}{2-e^{\frac{-t}{2}}}=f_{\frac{1}{2}}(t)$$

H est une primitive de $f_{\frac{1}{2}}$ sur $[0;+\infty[$.

4.b. La valeur moyenne de $f_{\frac{1}{2}}$ sur [0;5] est : $\mu=\frac{1}{5-0}\int_0^5 f_{\frac{1}{2}}(t)\,dt=\frac{1}{5}(H(5)-H(0))$

$H(5)=100\ln(2-e^{-2,5})+250$ $\quad H(0)=100\ln(1)+50\times 0=0$

$\mu=20\ln(2-e^{-2,5})+50$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\mu=63$ à l'unité près.

Conclusion

La valeur moyenne de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ sur l'intervalle [0;5] est 63 (tonnes).

