Exercice 2 5 points

Dans les parties A et B, de cet exercice on considère une maladie ; tout individu a une probabilité égale à 0,15 d'être touché par la maladie.

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.).Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Un test de dépistage de cette maladie a été mis au point. Si l'individu est malade, dans 94 % des cas le test est positif. Pour un individu, choisi au hasard dans cette population, la probabilité que le test soit positif vaut 0,158.

1. On teste un individu au hasard dans la population : le test est positif. Une valeur arrondie au centième de la probabilité que la personne soit malade est égale à :
A : 0,94 **B :** 1 **C :** 0,89 **D :** on ne peut pas savoir

2. On prélève un échantillon aléatoire dans la population, et on fait passer le test aux individus de cet échantillon. On souhaite que la probabilité qu'au moins un individu soit testé positivement soit supérieure ou égale à 0,99. La taille minimum de l'échantillon doit être égale à :
A : 26 personnes **B :** 27 personnes **C :** 3 personnes **D :** 7 personnes

3. Un vaccin pour lutter contre cette maladie a été mis au point. Il est fabriqué par une entreprise sous forme de dose injectable par seringue. Le volume V (exprimé en millilitre) d'une dose suit une loi normale d'espérance $\mu=2$ et d'écart-type σ . La probabilité que le volume d'une dose, exprimé en millilitre, soit compris entre 1,99 et 2,01 millilitres est égale à 0,997.
La valeur de σ doit vérifier :
A : $\sigma=0,02$ **B :** $\sigma<0,003$ **C :** $\sigma>0,003$ **D :** $\sigma=0,003$

Partie B

1. Une boîte d'un certain médicament permet de soigner un malade.
La durée d'efficacité (exprimée en mois) de ce médicament est modélisée de la manière suivante :
- durant les 12 premiers mois après fabrication, on est certain qu'il demeure efficace ;
- au-delà, sa durée d'efficacité restante suit une loi exponentielle de paramètre λ .

La probabilité que l'une des boîtes prise au hasard dans le stock ait une durée d'efficacité totale supérieure à 18 mois est égale à 0,887.
Quelle est la valeur moyenne de la durée d'efficacité totale de ce médicament ?

2. Une ville de 100000 habitants veut constituer un stock de ces boîtes afin de soigner les personnes malades. Quelle doit être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité qu'il suffise à soigner tous les malades de cette ville soit supérieure à 95 % ?

CORRECTION

Partie A

1. Réponse : C 0,89

Justification non demandée

On nous demande de déterminer la probabilité qu'une personne soit touchée par la maladie sachant que le test est positif.
On choisit une personne au hasard dans la population et on note :
M l'événement : « la personne est touchée par la maladie »
T l'événement : « le test de la personne est positif ».
L'énoncé précise :
$P(M)=0,15$; $P_M(T)=0,94$ et $P(T)=0,158$

$$P_T(M)=\frac{P(M\cap T)}{P(T)}=\frac{P(M)\times P_M(T)}{P(T)}=\frac{0,15\times 0,94}{0,158}=\frac{0,141}{0,158}=0,89 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

2. Réponse: B 27 personnes

Justification non demandée

On note n la taille de l'échantillon.
A l'événement : « au moins un individu de l'échantillon est testé positivement »
$\bar{A}$ l'événement : « tous les individus de l'échantillon sont testés négativement ».
Donc $P(\bar{A})=(1-0,158)^n=0,842^n$ et $P(A)=1-0,842^n$.
$P(A)\geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1-0,842^n\geqslant 0,99 \Leftrightarrow 0,01\geqslant 0,842^n$
$\ln$ est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$
$\Leftrightarrow \ln(0,01)\geqslant \ln(0,842^n) \Leftrightarrow \ln(0,01)\geqslant n\times\ln(0,842)$
$0<0,842<1$ donc $\ln(0,842)<0$
$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,842)}\leqslant n$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,842)}=26,78$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel donc $27\leqslant n$

3. Réponse : C $\sigma>0,003$

Justification non demandée

V suit a loi normale d'espérance $\mu=2$ et d'écart-type σ donc $Y=\dfrac{V-2}{\sigma}$ suit la loi normale centrée et réduite.

$$P(1,99\leqslant V\leqslant 2,01)=P\left(-\frac{0,01}{\sigma}\leqslant Y\leqslant \frac{0,01}{\sigma}\right)=0,997.$$

On détermine avec la calculatrice, le nombre réel strictement positif tel que $P(-a\leqslant Y\leqslant a)=0,997$ ou $P(Y\leqslant a)=0,9985$.
On obtient $a=2,9677$ à 10^{-4} près.
Donc $\dfrac{0,01}{\sigma}=2,9677 \Leftrightarrow \sigma=\dfrac{0,01}{2,9677}=0,0034$ à 10^{-4} près.

Partie B

1. $18=12+6$
Pour les douze premiers le médicament demeure efficace et pour les six mois suivants la durée d'efficacité suit la loi exponentielle de paramètre : λ.
Si on note D la durée en mois (supérieure à 12 mois) d'efficacité du médicament alors D est une variable

aléatoire suiva t la loi exponentielle de paramètre λ , et on a $P(6 \leqslant D)=0,887$.
Or $P(6 \leqslant D)=e^{-6\lambda}$.

$e^{-6\lambda}=0,887 \quad \Leftrightarrow \quad -6\lambda=\ln(0,887) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=-\frac{1}{6}\ln(0,887)=0,0200$ à 10^{-4} près.

L'espérance mathématique de D est : $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0,02}=50(\text{ mois})$.

Donc la durée d'efficacité totale de ce médicament est:50+12=62 mois (5 ans et 2 mois).

2. Dans la population on considère un échantillon de n=100000 personnes, la proportion d'individus touchés par la maladie est p=0,15.
$n=100000 \geqslant 30 \qquad np=15000 \geqslant 5 \qquad n(1-p)=85000 \geqslant 5$
On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion d'individus touchés par la maladie dans un échantillon de taille 100000, au seuil de 95 %.

$$I=\left[0,15-1,96\times\sqrt{\frac{0,15\times 0,85}{100000}};0,15+1,96\times\sqrt{\frac{0,15\times 0,85}{100000}}\right]$$

$1,96\times\sqrt{\frac{0,15\times 0,85}{100000}}=0,00213$ à 10^{-5} près

$I=[0,14787;0,15213]$

$0,15213\times 100000=15213$.

Un stock de 15213 boîtes permettra de soigner tous les malades de la ville avec une probabilité supérieure à 95 %.