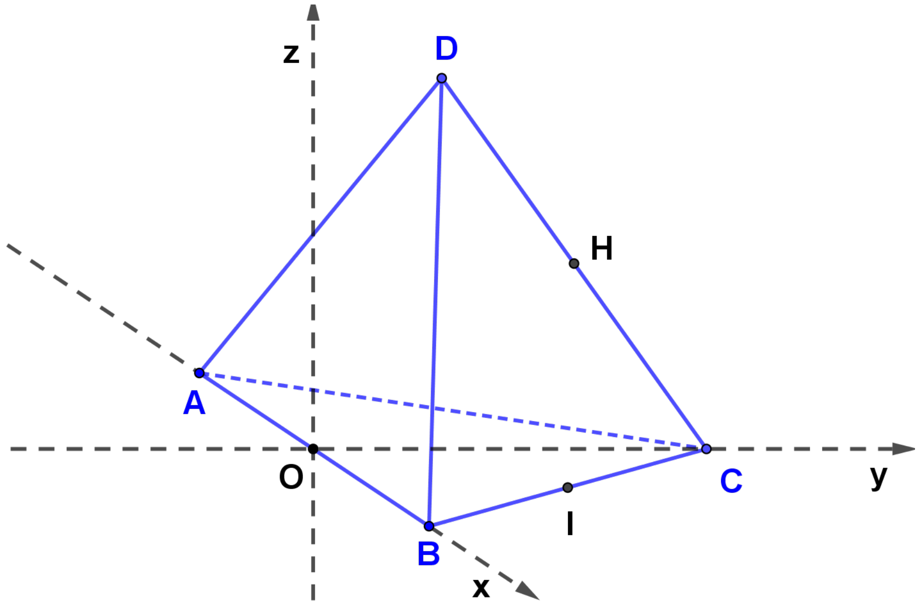
Exercice 3 5 points

On se place dans un repère orthonormé d'origine O et d'axes (Ox), (Oy) et (Oz).

Dans ce repère, on donne les points A(-3;0;0), B(3;0;0), $C(0;3\sqrt{3};0)$ et $D(0;\sqrt{3};2\sqrt{6})$.

On note H le milieu du segment [CD] et I le milieu du segment [BC].



1. Calculer les longueurs AB et AD

On admet pour la suite que toutes les arêtes du solide ABCD ont la même longueur, c'est à dire que le tétraèdre ABCD est un tétraèdre régulier.
On appelle $\mathscr{P}$ le plan de vecteur normal $\overrightarrow{OH}$ et passant par le point I.

2. Étude de la section du tétraèdre par le plan $\mathscr{P}$.
2.a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2y\sqrt{3}+z\sqrt{6}-9=0$.
2.b. Démontrer que le milieu J de [BD] est le point d'intersection de la droite (BD) et du plan $\mathscr{P}$.
2.c. Donner une représentation paramétrique de la droite (AD), puis démontrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AD) sont sécantes en un point K dont on déterminera les coordonnées.
2.d. Démontrer que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.
2.e. Déterminer précisément la nature de la section du tétraèdre ABCD par le plan $\mathscr{P}$.

3. Peut-on placer un point M sur l'arête [BD] tel que le triangle OIM soit rectangle en M ?

CORRECTION

On se place dans un repère orthonormé d'origine O.
$A(-3;0;0)$; $B(3;0;0)$; $C(0;3\sqrt{3};0)$ et $D(0;\sqrt{3};2\sqrt{6})$.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ **AB=6** $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\\\sqrt{3}\\2\sqrt{6}\end{pmatrix}$ $AD^2=9+3+4\times 6=36$ donc **AD=6**

On admet que le tétraèdre ABCD est régulier.

2. Étude de la section du tétraèdre ABCD par le plan $\mathcal{P}$.

2.a. $I\left(\frac{3+0}{2};\frac{0+3\sqrt{3}}{2};\frac{0+0}{2}\right)$ $I(1,5;1,5\sqrt{3};0)$

$H\left(\frac{0+0}{2};\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2};\frac{0+2\sqrt{6}}{2}\right)$ $H(0;2\sqrt{3};\sqrt{6})$

$\mathcal{P}$ est le plan de vecteur normal $\overrightarrow{OH}$ et passant par I.

$M(x;y;z)$ $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-1,5\\y-1,5\sqrt{3}\\z\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{3}\\\sqrt{6}\end{pmatrix}$

M appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{IM}=0 \Leftrightarrow 0\times(x-1,5)+2\sqrt{3}\times(y-1,5\sqrt{3})+\sqrt{6}z=0$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}y+\sqrt{6}z-3\times(\sqrt{3})^2=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}y+\sqrt{6}z-9=0$

2.b. $J\left(\frac{3+0}{2};\frac{0+\sqrt{3}}{2};\frac{0+2\sqrt{6}}{2}\right)$ $J(1,5;0,5\sqrt{3};\sqrt{6})$

$2\sqrt{3}\times 0,5\times\sqrt{3}+\sqrt{6}\times\sqrt{6}-9=1\times 3+6-9=0$ donc le point J appartient au plan $\mathcal{P}$.
On peut vérifier par le calcul que le point B n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$, donc la droite (BD) n'est pas contenue dans le plan $\mathcal{P}$ et le plan $\mathcal{P}$ et la droite (BD) sont sécants en J.

2.c. (AD) est la droite passant par A(-3;0;0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\\\sqrt{3}\\2\sqrt{6}\end{pmatrix}$.

(AD) : $\begin{cases}x=3t-3\\y=\sqrt{3}t\\z=\sqrt{6}\end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$

Pour déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (AD), on résout le système :

$$\begin{cases}2y\sqrt{3}+z\sqrt{6}-9=0\\x=3t-3\\y=\sqrt{3}t\\z=2\sqrt{6}t\end{cases}$$

On obtient : $2\sqrt{3}\times\sqrt{3}t+2\sqrt{6}\times\sqrt{6}t-9=0 \Leftrightarrow 6t+12t-9=0 \Leftrightarrow t=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}=0,5$

$x=3\times 0,5-3=-1,5$ $y=0,5\sqrt{3}$ $z=\sqrt{6}$ $K(-1,5;0,5\sqrt{3};\sqrt{6})$

<u>Remarque</u>

Le milieu de [AD] a pour coordonnées $\left(\frac{-3+0}{2};\frac{0+\sqrt{3}}{2};\frac{0+2\sqrt{6}}{2}\right)$ soit $(-1,5;0,5\sqrt{3};\sqrt{6})$.

<u>Conséquence</u>

K est le milieu de [AD]

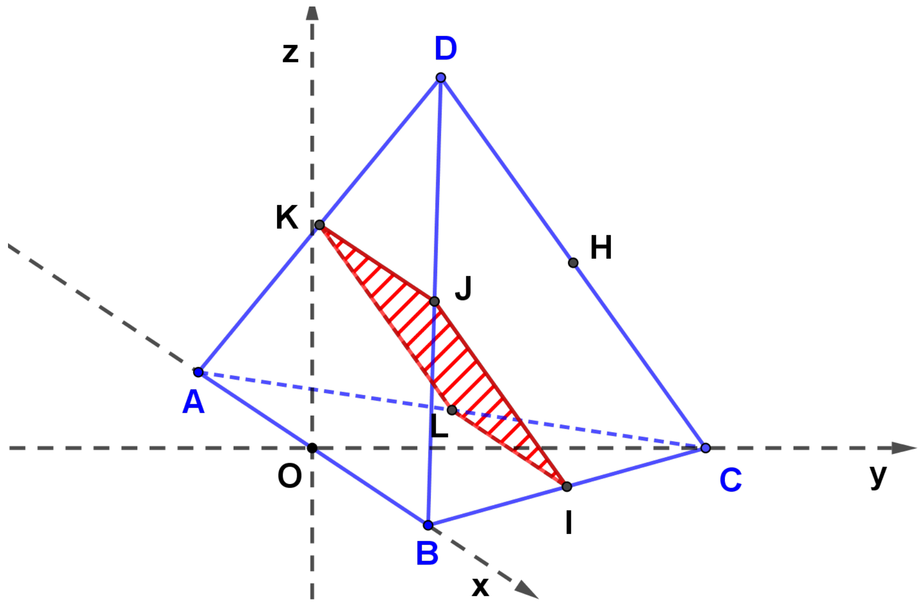
2.d. $I(1,5;1,5\sqrt{3};0)$ $J(1,5;0,5\sqrt{3};\sqrt{6})$ $K(-1,5;0,5\sqrt{3};\sqrt{6})$ $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{3}\\\sqrt{6}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$

$\vec{IJ}.\vec{JK}=0\times(-3)+(-\sqrt{3})\times 0+\sqrt{6}\times 0=0$ donc les droites (IJ) et(JK) sont perpendiculaires.

2.e. Soit L le milieu de [AC] $L\left(\frac{-3+0}{2};\frac{0+3\sqrt{3}}{2};\frac{0+0}{2}\right)$ $L(-1{,}5;1{,}5\sqrt{3};0)$.

$2\sqrt{3}\times 1{,}5\sqrt{3}-0-9=9-9=0$ donc le point L appartient au plan $\mathscr{P}$ et la droite (AC) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en L.

La section du tétraèdre ABCD par le plan $\mathscr{P}$ est le quadrilatère IJKL.



On rappelle que le tétraèdre ABCD est régulier : AB=AC=AD=BC=BD=CD=6.
Dans le triangle ABC, I est le milieu de [BC] et L est le milieu de [AC] donc (IL) est parallèle à (AB) et $IL=\frac{AB}{2}=\frac{6}{2}=3$.
Dans le triangle ABD, J est le milieu de [BD] et K est le milieu de [AD] donc (JK) est parallèle à (AB) et $JK=\frac{AB}{2}=\frac{6}{2}=3$.

<u>Conséquence</u>
(IL)et (JK) sot parallèles et IL=JK=3.
Dans le triangle BCD, I est le milieu de [BC] et J est le milieu de [BD] donc (IJ) est parallèle à (DC) et $IJ=\frac{DC}{2}=\frac{6}{2}=3$.
Dans le triangle ACD, L est le milieu de [AC] et K est le milieu de [AD] donc (KL) est parallèle à (DC) et $KL=\frac{DC}{2}=\frac{6}{2}=3$

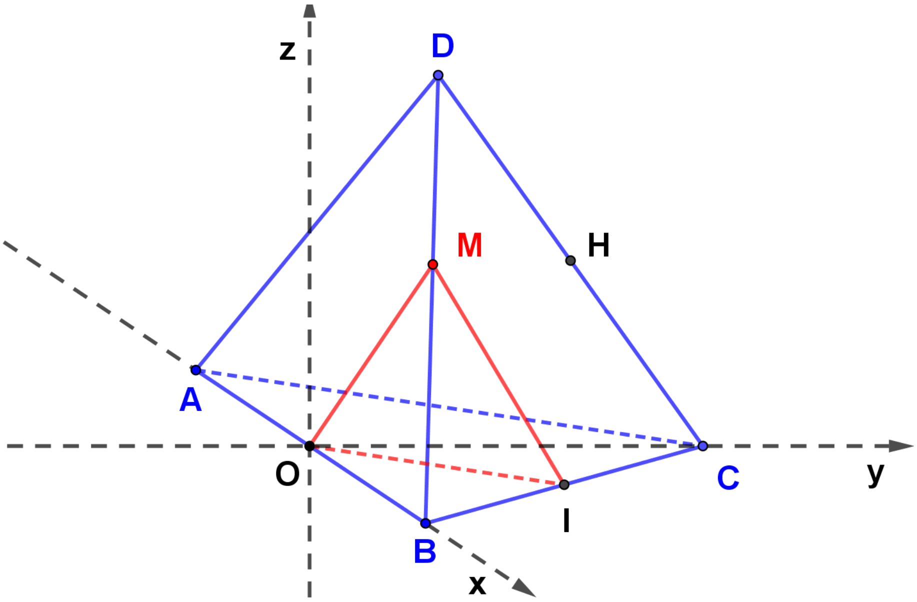
<u>Conséquence</u>
(IJ) et (KL) sont parallèles et IJ=KL=3.

Les côtés du quadrilatère IJKL sont parallèles deux à deux et ont la même longueur 3 donc ce quadrilatère est un losange.
Nous avons vu dans la question 2.d. que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires donc l'angle $\widehat{ABC}$ est droit.

<u>Conclusion</u>
Le quadrilatère IJKL est un carré.

5. (BD) est la droite passant par B(3;0;0) et de vecteur directeur $\vec{BD}\begin{pmatrix}-3\\ \sqrt{3}\\ 2\sqrt{6}\end{pmatrix}$.

(BD) : $\begin{cases} x = -3\lambda+3 \\ y = \sqrt{3}\lambda \\ z = 2\sqrt{6}\lambda \end{cases}$ λ décrit $\mathbb{R}$.



M appartient à [BD] donc $M(-3\lambda+3;\sqrt{3}\lambda;2\sqrt{6}\lambda)$
$O(0;0;0)$ $\quad I(1,5;1,5\sqrt{3};0)$
$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} -3\lambda+3 \\ \sqrt{3}\lambda \\ 2\sqrt{6}\lambda \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} -3\lambda+1,5 \\ \sqrt{3}\lambda-1,5\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6}\lambda \end{pmatrix}$

Le triangle OIM est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{IM}=0$.
$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{IM}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (-3\lambda+3)(-3\lambda+1,5)+\sqrt{3}\lambda(\sqrt{3}\lambda-1,5\sqrt{3})+2\sqrt{6}\lambda\times2\sqrt{6}\lambda=0 \quad \Leftrightarrow$
$9\lambda^2-13,5\lambda+4,5+3\lambda^2-4,5\lambda+24\lambda^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 36\lambda^2-18\lambda+4,5=0 \quad \Leftrightarrow \quad 8\lambda^2-4\lambda+1=0$
$\Delta=16-4\times8\times1=-16 < 0$

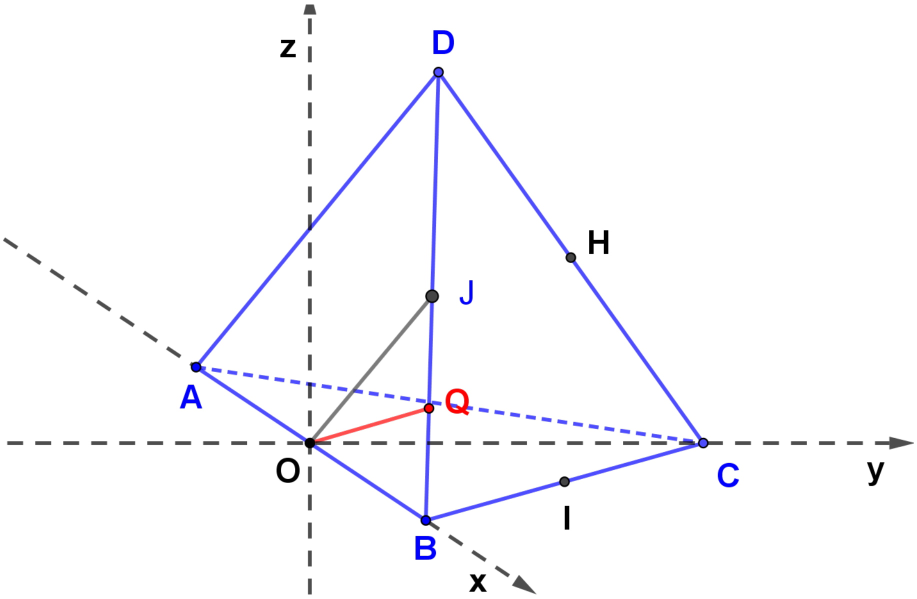
L'équation n'admet pas de solution donc **il n'existe pas de point M du segment [BD] tel que le triangle OIM soit rectangle en M.**

Remarque

Le plan médiateur du segment [AC] contient la droite (BD), ce plan est aussi le plan médiateur de [OI].
Donc pour tout point M de [BD] ; OM=MI (le triangle OIM est isocèle en M).
Le triangle OIM est rectangle en M si et seulement si $2\,OM^2=OI^2=3^2=9$.
$OM^2=\frac{9}{2}$ donc $OM=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=1,5\sqrt{2}$.
Soit Q le milieu de [BJ], le triangle BOJ est un triangle équilatéral et BO=OJ=BJ=3, donc (OQ) est la hauteur issue de O du triangle BOJ.
$OQ=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1,5\sqrt{3}$.
OQ est la plus petite distance du point O à un point M de la droite (BD).
Or $OQ=1,5\sqrt{3} > 1,5\sqrt{2}$

Conclusion

Il n'existe pas de point M de l'arête [BD] tel que le triangle OIM soit rectangle en M.


z
D
H
J
A
Q
O
C
y
I
B
x