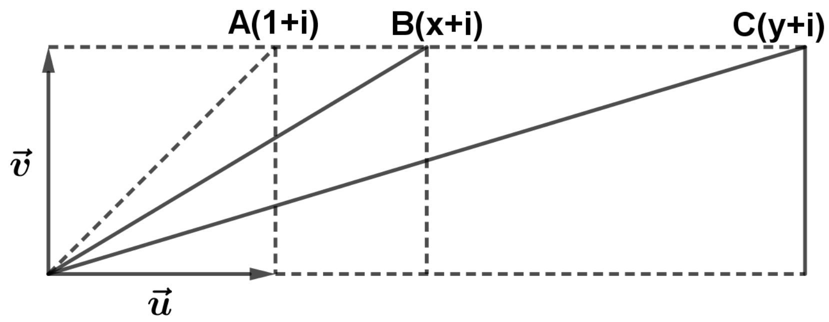
Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans cet exercice x et y sont des nombres réels supérieurs à 1.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=1+i$, $z_B=x+i$ et $Z_C=y+i$.



Problème : on cherche les valeurs éventuelles des réels x et y, supérieures à 1, pour lesquelles :

$$OC=OA\times OB \quad \text{et} \quad (\vec{u};\overrightarrow{OB})+(\vec{u};\overrightarrow{OC})=(\vec{u};\overrightarrow{OA}).$$

1. Démontrer que si $OC=OA\times OB$, alors $y^2=2x^2+1$.

2. Reproduire sur la copie et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche tous les couples (x;y) tels que :

$$\begin{cases} y^2=2x^2+1 \\ x \text{ et } y \text{ sont des nombres entiers} \\ 1\leqslant x\leqslant 10 \text{ et } 1\leqslant y\leqslant 10 \end{cases}$$

```
Pour x allant de 1 à . . . faire
    Pour . . .
        Si . . .
            Afficher x et y
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

Lorsque l'on exécute cet algorithme, il affiche la valeur 2 pour la variable x et la valeur 3 pour la variable y.

3. Étude d'un cas particulier : dans cet question seulement, on prend x=2 et y=3.

3.a. Donner le module et un argument de z_A.

3.b. Montrer que $OC=OA\times OB$

3.c. Montrer que $z_B z_C=5z_A$ et en déduire que $(\vec{u};\overrightarrow{OB})+(\vec{u};\overrightarrow{OC})=(\vec{u};\overrightarrow{OA})$.

4. On revient au cas général, et on cherche s'il existe d'autres valeurs des réels x et y telles que les points A, B et C vérifient les deux conditions :

$$OC=OA\times OB \quad \text{et} \quad (\vec{u};\overrightarrow{OB})+(\vec{u};\overrightarrow{OC})=(\vec{u};\overrightarrow{OA}).$$

On rappelle que si $OC = OA \times OB$ alors $y^2 = 2x^2 + 1$ (question 1).

4.a. Démontrer que si $(\vec{u};\overrightarrow{OB}) + (\vec{u};\overrightarrow{OC}) = (\vec{u};\overrightarrow{OA})$ alors $\arg\left[\frac{(x+i)(y+i)}{1+i}\right] = 0 \mod 2\pi$.

En déduire que sous cette condition : $x + y - xy + 1 = 0$.

4.b. Démontrer que si les deux conditions sont vérifiées et que de plus $x \neq 1$ alors :

$y = \sqrt{2x^2+1}$ et $y = \frac{x+1}{x-1}$.

5. On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

$f(x) = \sqrt{2x^2+1}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Déterminer le nombre de solutions du problème initial.

On pourra utiliser la fonction h définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$ et s'appuyer sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-dessous.

$f(x) := sqrt(2 * x^2 + 1)$
$x \to \sqrt{2 * x^2 + 1}$
dériver(f)
$x \to \frac{2 * x}{\sqrt{2 * x^2 + 1}}$
g(x):=(x+1)/(x-1)
$x \to \frac{x+1}{x-1}$
dériver(g)
$x \to -\frac{2}{(x-1)^2}$

CORRECTION

1. $OA^2=|z_A|^2=1^2+1^2=2$

$OB^2=|z_B|^2=x^2+1$

$OC^2=|z_C|^2=y^2+1$

Si $OC=OA\times OB$ alors $OC^2=OA^2\times OB^2 \Leftrightarrow y^2+1=2\times(x^2+1) \Leftrightarrow y^2=2x^2+1$

2.

```
Pour x allant de 1 à 10  faire
    Pour y allant de 1 à 10 faire
        Si y² = 2x² + 1
            Afficher x et y
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

On propose une programmation de l'algorithme en Python

```python
print('Début de programme')
for i in range(10):
    x=i+1
    a=2*x**2+1
    for j in range(10):
        y=j+1
        b=y**2
        c=b-a
        if c==0:
            print("x="+str(x),"y="+str(y))
print('Fin de programme')
```

Exécution du programme

```
Début de programme
x=2 y=3
Fin de programme
>>>
```

On obtient bien x=2 et y=3

3.a. $|z_A|=\sqrt{2}$ $\quad z_A=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arg(z_A)=\frac{\pi}{4} \mod 2\pi$

3.b. x=2 et y=3

$OA^2=2$ donc $OA=\sqrt{2}$; $OB^2=5$ donc $OB=\sqrt{5}$ et $OC^2=10$ donc $OC=\sqrt{10}$

$\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}$ donc on a bien $OA\times OB=OC$

3.c. $z_B\times z_C=(2+i)(3+i)=6+i(2+3)-1=5+5i=5(1+i)=5z_A$

$\arg(z_B\times z_C)=\arg(5z_A) \mod 2\pi$

$\arg(z_B)+\arg(z_C)=\arg(5)+\arg(z_A) \mod 2\pi$

$\arg(5)=0 \mod 2\pi$

donc $(\vec{u};\overrightarrow{OB})+(\vec{u};\overrightarrow{OC})=(\vec{u};\overrightarrow{OA})$

4.a. Si $(\vec{u};\overrightarrow{OB})+(\vec{u};\overrightarrow{OC})=(\vec{u};\overrightarrow{OA})$ alors $\arg(z_B)+\arg(z_C)=\arg(z_A) \mod 2\pi$

$\Leftrightarrow \arg(z_B\times z_C)-\arg(z_A)=0 \mod 2\pi \Leftrightarrow \arg\left[\frac{z_B\times z_C}{z_A}\right]=0 \mod 2\pi$

$\Leftrightarrow \quad \arg\left[\dfrac{(x+\mathrm{i})(y+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right]=0 \mod 2\pi$

Donc le nombre complexe $Z=\dfrac{(x+\mathrm{i})(y+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}$ est un nombre réel, sa partie imaginaire est nulle.

$$Z=\frac{(x+\mathrm{i})(y+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{(xy+\mathrm{i}(x+y)-1)(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{xy-1+x+y}{2}+\mathrm{i}\frac{x+y-xy+1}{2}$$

Donc x+y-xy+1=0

4.b. $x\neq 1$ donc $x>1$ et $y\geqslant 1$

$y^2=2x^2+1$ donc $y=\sqrt{2x^2+1}$

$x+y-xy+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad y(1-x)+1+x=0 \quad \Leftrightarrow \quad -y(1-x)=x+1 \quad \Leftrightarrow \quad y=\dfrac{x+1}{x-1}$

5. Le logiciel de calcul formel nous donne les fonctions dérivées de f et de g.

Pour tout x de l'intervalle $]1;+\infty[$

$\mathrm{f}'(x)=\dfrac{2+x}{\sqrt{2x^2+1}}$ et $\mathrm{g}'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

La fonction h est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\mathrm{h}'(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{2x^2+1}}+\dfrac{2}{(x-1)^2}>0$

h est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(1)=\sqrt{3} \qquad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{h}(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{f}(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{g}(x)=1$

donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{h}(x)=+\infty$.

h est continue est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation h(x)=0 admet une unique solution sur $[1;+\infty[$.

On a h(2)=0.

Conclusion

Il y a une unique solution au problème initial : x=2 et y=3.