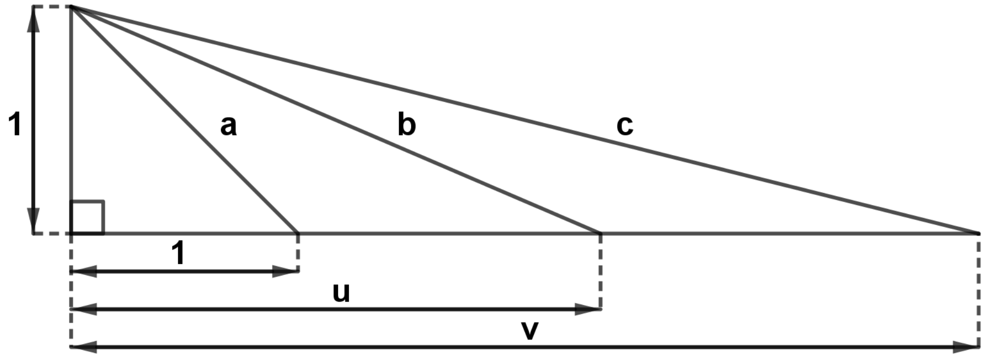
Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On s'intéresse à la figure suivante, dans laquelle a, b et c désignent les longueurs des hypoténuses des trois triangles rectangles en O dessinés ci-dessous.



Problème : On cherche les couples de nombres entiers naturels non nuls (u;v) tels que ab=c.

1. Modélisation
   Démontrer que les solutions du problème sont des solutions de l'équation :
   $(E): \; v^2 - 2u^2 = 1$ (u et v étant des entiers naturels non nuls).

2. Recherche systématique de solutions de l'équation (E)
   Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche au cours de son exécution tous les couples solutions de l'équation pour lesquels $1 \leqslant u \leqslant 1000$ et $1 \leqslant v \leqslant 1000$.

Pour u allant de 1 à . . . faire **Pour . . .** **Si . . .** **Afficher u et v** **Fin Si** **Fin Pour** **Fin Pour**	**Au cours de son exécution,** **l'algorithme affiche:** **2 3** **12 17** **70 99** **408 577**

3. Analyse des solutions éventuelles de l'équation (E)
   On suppose que le couple (u;v) est une solution de l'équation (E).

3.a. Établir que $u < v$.

3.b. Démontrer que n et n^2 ont la même parité pour tout entier naturel n.

3.c. Démontrer que v est un nombre impair.

3.d. Établir que $2u^2 = (v-1)(v+1)$.
En déduire que u est un nombre pair.

4. Une famille de solutions.
   On assimile un couple de nombres entiers (u;v) à la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
   On définit également la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

4.a. Démontrer que si une matrice colonne X est une solution de l'équation (E), alors AX est aussi une solution de l'équation (E).

4.b. Démontrer que si une matrice colonne X est une solution de l'équation (E), alors pour tout entier naturel n, $A^n X$ est aussi une solution de (E).

4.c. À l'aide de la calculatrice, donner un couple (u;v) solution de l'équation (E) tel que $v > 10\,000$.

CORRECTION

1. Si $ab=c$ alors $a^2b^2=c^2$

$a^2=1^2+1^2=2$ $b^2=1^2+u^2=1+u^2$ $c^2=1^2+v^2=1+v^2$

$a^2b^2=c^2 \Leftrightarrow 2(1+u^2)=1+v^2 \Leftrightarrow 2+2u^2=1+v^2 \Leftrightarrow v^2-2u^2=1$

2. On complète l'algorithme demandé.

Pour u allant de 1 à 1000 . faire Pour v allant de 1 à 1000 faire Si $v^2-2u^2=1$ Afficher u et v Fin Si Fin Pour Fin Pour	Au cours de son exécution, l'algorithme affiche: 2 3 12 17 70 99 408 577

On propose une programmation de l'algorithme en Python

```
print('Début de programme')
for i in range(1000):
    u=i+1
    a=2*u**2
    for j in range(1000):
        v=j+1
        b=v**2
        if b-a==1:
            print("u="+str(u),"v="+str(v))
print('fin de programme')
```

Exéution du programme

```
Début de programme
u=2 v=3
u=12 v=17
u=70 v=99
u=408 v=577
fin de programme
```

On obtient les valeurs données dans l'énoncé.

3.a. u et v sont des entiers naturels non nuls.

$v^2=2u^2+1=u^2+(u^2+1)$ donc $v^2 > u^2$.

La fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

donc $u < v$.

3.b. Si n est un entier naturel pair alors $n=2k$ (k étant un entier naturel).

$n^2=(2k)^2=2(2k^2)$, $2k^2$ est un entier naturel donc n^2 est un entier naturel pair.

Si n est un entier naturel impair alors $n=2k+1$ (k entier naturel).

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$, $2k^2+2k$ est un entier naturel donc n^2 est un entier naturel impair.

Conclusion

n et n^2 sont de même parité pour tout entier naturel n.

3.c. $v^2=2u^2+1$, $2u^2$ est un entier naturel, donc v^2 est un nombre impair.

v et v^2 sont de même parité.

Conclusion

v est un nombre impair.

3.d. $v^2-2u^2=1 \Leftrightarrow 2u^2=v^2-1 \Leftrightarrow 2u^2=(v-1)(v+1)$

$v+1=(v-1)+2$ donc (v+1) et (v-1) sont deux entiers de même parité.
2 est un nombre premier qui divise le produit (v+1)(v-1) donc 2 divise (v+1) **ou** (v-1).
(v+1) et (v-1) sont de même parité donc 2 divise (v+1) **et** (v-1).
<u>Conséquence</u>
4 divise le produit (v+1)(v-1), on obtient 2 divise u^2 et 2 divise u car 2 est premier.
<u>Conclusion</u>
u est un nombre pair.

4.a. $X=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ $AX=\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3u+2v\\4u+3v\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}U=3u+2v\\V=4u+3v\end{cases}$

Si $v^2-2u^2=1$ alors $V^2-2U^2=(4u+3v)^2-2(3u+2v)^2=16u^2+4v^2+24uv-2(9u^2+4v^2+12uv)$
$V^2-2U^2=16u^2+9v^2-18u^2-8v^2=v^2-2u^2=1$
<u>Conclusion</u>
Si $X=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ est solution de l'équation (E) alors $AX=\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}$ est aussi solution de (E).

4.b. Sachant que X est solution de (E), on veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : A^nX est une solution de (E).
<u>Initialisation</u>
Pour n=0 $A^0=I$ et $A^0X=IX=X$ et X est solution de (E).
La propriété est vérifié pour n=0.
<u>Hérédité</u>
Pour démontrer que la propriété est hérédidaire pour tout entier naturel n.
On suppose que A^nX est une solution de (E) et on doit démontrer que $A^{n+1}X$ est solution de (E).
Or $A^{n+1}X=A(A^nX)$ et A^nX est solution de (E) donc $A^{n+1}X$ est solution de (E).
<u>Conclusion</u>
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n A^nX est solution de (E).

4.c. L'énoncé précise que $X=\begin{pmatrix}408\\577\end{pmatrix}$ est une solution de (E).

$AX=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}408\\577\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times408+2\times577\\4\times408+3\times577\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2378\\3363\end{pmatrix}$ est aussi solution de (E).

$A^2X=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2378\\3363\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times2378+2\times3363\\4\times2378+3\times3363\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13860\\19601\end{pmatrix}$ est aussi solution de (E).

$u=13860$ et $v=19601>10000$.