EXERCICE 1 — 4 points

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.
Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.
Dans ce qui suit, t est exprimé en minute.
À l'instant t=0, la hotte est mise en marche et on laisse la fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression f(t), où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle [0;20] par : $f(t)=(0{,}8t+0{,}2)e^{-0{,}5t}+0{,}03$.
On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0;20].

t	0		1.75		20
f '(t)		+	0	−	
f	0.23	↗		↘	

Ainsi, la valeur f(0)=0,23 traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
1.a. Calculer f(20).
1.b. Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.

2. On souhaite que le taux de CO_2 retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
2.a. Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
2.b. On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 1.75
p ← 0.1
V ← 0.7
Tant que V>0.035
    t ← t+p
    V ← (0.8t+0.2)e^(−0.5t) + 0.03
Fin Tant que
```

Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?
Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.
3.a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle [0;11] par : $F(t)=(-1{,}6t-3{,}6)e^{-0{,}5t}+0{,}03t$.
Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0;11].
3.b. En déduire le taux moyen V_m , valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0;11].
Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.

CORRECTION

1.a. $f(20)=16,2\times e^{-10}+0,03$ = **0,031 à 10^{-3} près.**

1.b. f(1,75) est le maximum de f sur [0;20].

$f(1,75)=1,6\times e^{0,875}+0,03=0,697$ à 10^{-3} près.

69,7 % est le taux maximal (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.

2.a. On considère l'équation $f(x)=0,035$.

. Sur l'intervalle [0;1,75], f est strictement croissante donc si $0 \leqslant x \leqslant 1,75$ alors $f(0)=0,23 \leqslant f(x)$.
$0,035 < 0,23$

Conséquence

L'équation $f(x)=0,35$ n'admet pas de solution dans l'interval1e [0;1,75].

. Sur l'intervalle [1,75;20], f est une fonction continue et strictement décroissante sur [1,75;20], $f(1,75)=0,697$ et $f(20)=0,031$ et $0,031 < 0,035 < 0,697$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0,035$ admet une solution unique T appartenant à l'intervalle [1,75;20].

2.b. **À la fin de l'algorithme, la valeur de la variable t donne une valeur approchée, par excès, de T à 10^{-1} près.**

On peut déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de T.

Par balayage, on obtient :

$f(15,6)=0,0352$ à 10^{-4} près

$f(15,7)=0,0349$ à 10^{-4} près

donc **T=15,7 à 10^{-1} près.**

Complément (non demandé)

On peut programmer en Python l'algorithme précédent.

Programme

```
print('Début de programme')
t=1.75
p=0.1
V=0.7
from math import*
while V>0.035:
    t=t+p
    V=(0.8*t+0.2)*exp(-0.5*t)+0.03
print("t="+str(t))
print("Fin de programme")
```

Execution du programme

```
Début de programme
t=15.749999999999961
Fin de programme
```

15,7 est valeur approchée de T à 10^{-1} près.

Remarque

Si dans le programme on écrit p=0,001 on obtient **15,688 pour valeur approchée à 10^{-3} près.**

3.a. F est définie sur [0;11] par :

$F(t)=(-1,6t-3,6)e^{-0,5t}+0,03$.

F est dérivable sur [0;11].

$(e^{-0,5t})'=-0,5e^{-0,5t}$

$F'(t)=-1,6e^{-0,5t}+(-1,6t-3,6)(-0,5e^{-0,5t})+0,03=-1,6e^{-0,5t}+(0,8t+1,8)e^{-0,5t}+0,03$

$F'(t)=(0,8t+0,2)e^{-0,5t}+0,03=f(t)$

F est donc une primitive de f sur [0;11].

3.b. la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0;11] est :

$$\mu = \int_0^{11} f(t)\,dt = \frac{1}{11-0}(F(11)-F(0)).$$

$F(0)=-3{,}6$ $F(11)=(-1{,}76-3{,}6)e^{-5{,}5}+0{,}33=0{,}308$ à 10^{-3} près.

$\mu=\frac{1}{11}\times 3{,}908=$ **0,355 à 10^{-3} près.**

V_m = 35,5 % est le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.