EXERCICE 2 4 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.Une réponse inexacte ou non justifiée ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Un type d'oscilloscope a une durée de vie, exprimée en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .
On sait que la durée de vie moyenne de ce type d'oscilloscope est de 8 ans.
Affirmation 1 : pour un oscilloscope de ce type choisi au hasard et ayant déjà fonctionné 3 ans, la probabilité que la durée de vie soit supérieure ou égale à 10 ans, arrondie au centième, est égale à 0,42.
On rappelle que si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a pour tout réel t positif : $P(X \leqslant t)=1-e^{-\lambda t}$.

2. En 2016, en France, les forces de l'ordre ont réalisé 9,8millions de dépistage d'alcoolémie auprès des automobilistes, et 3,1 % de ces dépistages étaient positifs.
Source : *OFDT (Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies)*
Dans une région donnée, le 15 juin 2016, une brigade de gendarmerie a effectué un dépistage sur 200 automobilistes.
Affirmation 2 : en arrondissant au centième, la probabilité que, sur les 200 dépistages, il y ait eu strictement plus de 5 dépistages positifs, est égale à 0,59.

3. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$.
Affirmation 3 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

4. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(4z^2-20z+37)(2z-7+2i)=0$.
Affirmation 4 : les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre P d'affixe 2.

CORRECTION

1. **Affirmation 1 :** **VRAIE**

Justification :

Pour une loi exponentielle de paramètre λ la durée de vie moyenne est : $\frac{1}{\lambda}$.

On a donc : $\frac{1}{\lambda}=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{8}=0{,}125$.

Une loi exponentielle X est une loi de durée de vie sans vieillissement c'est à dire :

$P_{(3\leqslant X)}(X\leqslant 10)=P_{(3\leqslant X)}(X\leqslant 7+3)=P(X\leqslant 7)$

$P_{(3\leqslant X)}(10\leqslant X)=P(7\leqslant X)=1-P(X\leqslant 7)=e^{-0{,}125\times 7}=e^{-0{,}875}$ = **0,42 à 10^{-2} près.**

2. **Affirmation 2 :** **VRAIE**

Justification :

Étant donné le grand nombre de dépistage, on peut supposer les dépistages s'effectuent avec remise et sont indépendants.
On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On choisit au hasard le dépistage d'un automobiliste.
Succès S : le dépistage est positif la probabilité de succès est $p=0{,}031$
Échec $\bar{S}$: le dépistage est négatif la probabilité de l'échec est $q=0{,}969$.
On effectue 200 épreuves indépendantes.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 200 épreuves est la loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0{,}031$.
La probabilité que, sur les 200 dépistages, il y ait eu **strictement plus de 5 dépistages positifs** est $P(6\leqslant X)$
En utilisant la calculatrice on obtient : $P(6\leqslant X)$ **= 0,59 à 10^{-2} près.**

3. **Affirmation 3 :** **FAUSSE**

Justification :

(E) : $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$

$6x-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

$x>0$

$0<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$

L'ensemble de définition de l'équation est $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Pour tout x de l'ensemble de définition :

$(E) \Leftrightarrow \ln(6x-2)(2x-1)=\ln(x) \Leftrightarrow (6x-2)(2x-1)=x \Leftrightarrow 12x^2-10x+2=x$

$(E) \Leftrightarrow 12x^2-11x+2=0$

$\Delta=11^2-4\times 12\times 2=121-96=25=5^2$

$x_1=\frac{11-5}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ et $x_2=\frac{11+5}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$

On a : $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$

Conclusion

L'équation (E) admet une seule solution dans $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$: $x_2=\frac{2}{3}$.

4. **Affirmation 4 :** **VRAIE**

Justification

$(0;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormé du plan complexe.

$(4z^2-20z+37)(2z-7+2i)=0 \Leftrightarrow (4z^2-20z+37=0$ ou $2z-7+2i=0)$

. $4z^2-20z+37=0$

$\Delta=(-20)^2-4\times4\times37=400-16\times37=-192=-64\times3=(8\sqrt{3}i)^2$

$z_1=\dfrac{20+8\sqrt{3}i}{8}=2,5+\sqrt{3}i \qquad M_1(2,5+\sqrt{3}i)$

$z_2=\bar{z}_1=\dfrac{20-8\sqrt{3}i}{8}=2,5-\sqrt{3}i \qquad M_2(2,5-\sqrt{3}i)$

. $2z-7+2i=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{7}{2}-i=3,5-i \qquad M_3(3,5-i)$

. $P(2)$

$\overrightarrow{PM_1}(0,5+\sqrt{3}i) \qquad PM_1^2=0,25+3=3,25$

$\overrightarrow{PM_2}(0,5-\sqrt{3}i) \qquad PM_2^2=0,25+3=3,25$

$\overrightarrow{PM_3}(1,5-i) \qquad PM_3^2=2,5+1=3,25$

$PM_1=PM_2=PM_3=\sqrt{3,25}$

Les points M_1 ; M_2 et M_3 appartiennent au cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3,25}$.

On joint une figure (non demandée).