EXERCICE 3 — 7 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Un détaillant de fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Partie A

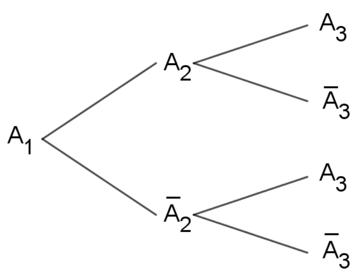
Le détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1200 g.
Dans la suite de tels melons sont qualifiés « conformes ».
Le détaillant achète ses melons auprès de trois maraîchers , notés respectivement A,B et C.
Pour les melons du maraîcher A, on modélise la masse en gramme par un variable aléatoire M_A qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [850;x], où x est un nombre réel supérieur à 1200.
La masse en gramme du maraîcher B est modélisée par une variable aléatoire M_B qui suit la loi normale de moyenne 1050 et d'écart-type inconnu σ .
Le maraîcher C affirme, quant à lui, que 80 % des melons de sa production sont conformes.

1. Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher A sont conformes. Déterminer x.
2. Il constate que 85 % des melons fournis par le maraîcher B sont conformes.
Déterminer l'écart-type σ de la variable M_B . En donner une valeur arrondie à l'unité.
3. Le détaillant doute de l'affirmation du maraîcher C. Il constate que sur 400 melons livrés par ce maraîcher au cours d'une semaine, seulement 294 sont conformes.
Le détaillant a-t-il raison de douter de l'affirmation du maraîcher C ?

Partie B

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :
. parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
. parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.
On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement : « le client achète un melon la semaine n ».
On a ainsi $P(A_1)=1$.

1.a. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous, relatif au trois premières semaines.



1.b. Démontrer que $P(A_3)=0,85$.
1.c. Sachant que le client achète un melo au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté au cours de la semaine 2 ?
Arrondir au centième.

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n=P(A_n)$. On a ainsi $p_1=1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1}=0,5\,p_n+0,4$.

3.a. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0{,}8$.
3.b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
3.c. La suite (p_n) est-elle convergente ?

4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0{,}8$.
4.a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.
4.b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$
4.c. Déterminer la limite de la suite (p_n) .

CORRECTION

Partie A

1. M_A est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle [850;x] (x est supérieur à 1200).

$P(900 \leqslant M_A \leqslant 1200) = \dfrac{1200-900}{x-850} = \dfrac{300}{x-850}$.

75 % des melons du maraîcher A sont conformes donc $P(900 \leqslant M_A \leqslant 1200) = 0{,}75$.

On obtient : $\dfrac{300}{x-850} = 0{,}75 \Leftrightarrow 0{,}75 \times (x-850) = 300 \Leftrightarrow 0{,}75\,x = 0{,}75 \times 850 + 300$

$\Leftrightarrow x = 850 + \dfrac{300}{0{,}75} \Leftrightarrow x = 850 + 400 \Leftrightarrow$ **x=1250.**

2. M_B est une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 1050 et d'écart-type σ.

On a : $P(900 \leqslant M_B \leqslant 1200) = 0{,}85$.

La variable aléatoire $X = \dfrac{M_B - 1050}{\sigma}$ suit la loi normale centrée et réduite.

$900 \leqslant M_B \leqslant 1200 \Leftrightarrow \dfrac{900-1050}{\sigma} \leqslant \dfrac{M_B - 1050}{\sigma} \leqslant \dfrac{1200-1050}{\sigma} \Leftrightarrow -\dfrac{150}{\sigma} \leqslant X \leqslant \dfrac{150}{\sigma}$

On détermine avec la calculatrice le nombre réel α tel que $P(-\alpha \leqslant X \leqslant \alpha) = 0{,}85$ ou $P(X \leqslant -\alpha) = 0{,}075$ ou $P(X \leqslant \alpha) = 0{,}925$ ou $P(\alpha \leqslant X) = 0{,}075$.

On obtient : $\alpha = 1{,}4395$.

$\dfrac{150}{\alpha} = 1{,}4395 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{150}{1{,}4395}$ = **104 à l'unité près.**

3. Le maraîcher C affirme que 80 % des melons de sa production sont conformes donc que la probabilité d'un melon pris au hasard dans sa production est : 0,8.

$n = 400 \geqslant 30 \qquad np = 400 \times 0{,}8 = 320 \geqslant 5 \qquad n(1-p) = 80 \geqslant 5$

On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 %.

$$I = \left[0{,}8 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}8 \times 0{,}2}{400}} ; 0{,}8 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}8 \times 0{,}2}{400}}\right]$$

$1{,}96 \times \sqrt{\dfrac{0{,}8 \times 0{,}2}{400}} = 1{,}96 \times 0{,}02 = 0{,}0392$

$I = [0{,}8 - 0{,}0392 ; 0{,}8 + 0{,}0392] = [0{,}7608 ; 0{,}8392]$

La proportion des melons conformes dans l'échantillon de 400 est : $f = \dfrac{294}{400} = 0{,}735$.

0,735 n'appartient pas à l'intervalle I.

Le détaillant a raison de douter de l'affirmation du maraîcher C avec unrisque d'erreur de 5 %.

Partie B

1.a. Parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante donc 10 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

Conséquences

$P_{A_1}(A_2) = 0{,}9 \qquad P_{A_2}(A_3) = 0{,}9$

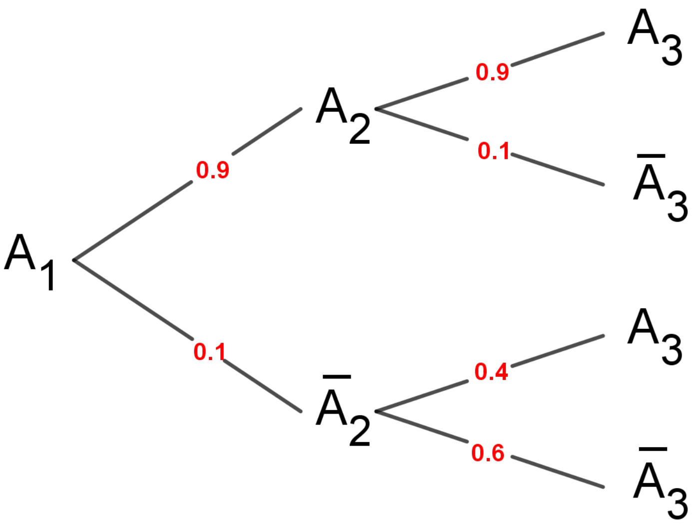
$P_{A_1}(\bar{A}_2) = 0{,}1 \qquad P_{A_2}(\bar{A}_3) = 0{,}1$

. Parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante donc 40 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante.

Conséquences

$P_{\bar{A}_2}(\bar{A}_3) = 0{,}6 \qquad P_{\bar{A}_2}(A_3) = 0{,}4$

. On complète l'arbre de probabilités donné.



1.b. En utilisant l'arbre de probabilités ou la formule des probabilités totales.

$P(A_3)=P(A_2\cap A_3)+P(\bar{A}_2\cap A_3)=P(A_2)\times P_{A_2}(A_3)+P\bar{A}_2(A_3)$

$P(A_3)=0{,}9\times 0{,}9+0{,}1\times 0{,}4=0{,}81+0{,}04=$ **0,85.**

1.c. On nous demande de calculer : $P_{A_3}(A_2)$.

$P_{A_3}(A_2)=\dfrac{P(A_2\cap A_3)}{P(A_3)}=\dfrac{0{,}9\times 0{,}9}{0{,}85}=\dfrac{0{,}81}{0{,}85}=$ **0,95.**

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$p_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_{n+1}\cap A_n)+P(A_{n+1}\cap \bar{A}_n)=P(A_n)\times P_{A_n}(A_{n+1})+P(\bar{A}_n)\times P(A_{n+1})$

$p_{n+1}=p_n\times 0{,}9+(1-p_n)\times 0{,}4=0{,}9\,p_n+0{,}4-0{,}4\,p_n=0{,}5\,p_n+0{,}4$

3.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $p_n > 0{,}8$.

Initialisation

$p_1=P(A_1)=1 > 0$,

La propriété est vérifiée pour n=1.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $p_n > 0{,}8$ et on doit démontrer que $p_{n+1} > 0{,}8$.

Or $p_{n+1}=0{,}5\,p_n+0{,}4$.

$p_n > 0{,}8 \Leftrightarrow 0{,}5\,p_n > 0{,}5\times 0{,}8=0{,}4 \Leftrightarrow 0{,}5\,p_n+0{,}4 > 0{,}4+04=0{,}8 \Leftrightarrow p_{n+1} > 0{,}8$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier $n \geqslant 1$ **,** $p_n > 0{,}8$.

3.b. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$p_{n+1}-p_n=0{,}5\,p_n+0{,}4-p_n=0{,}4-0{,}5\,p_n$

Or $p_n > 0{,}8$ donc $-0{,}5\,p_n < -05\times 0{,}8=-0{,}4$ et $0{,}4-0{,}5\,p_n < 0{,}4-0{,}4=0$

Conséquence

$p_{n+1}-p_n < 0$ **et la suite** (p_n) **est décroissante.**

3.c. La suite (p_n) **est décroissante et minorée par 0,8 donc la suite** (p_n) **est convergente.**

4. Pour tout entier $n > 1$: $v_n=p_n-0{,}8$ donc $p_n=v_n+0{,}8$

4.a. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$v_{n+1}=p_{n+1}=0{,}5\,p_n+0{,}4-0{,}8=0{,}5(v_n+0{,}8)-0{,}4=0{,}5\,v_n+0{,}4-0{,}4=0{,}5\,v_n$

<u>Conclusion</u>

(v_n) **est la suite géométrique de premier terme v_1 =1-0,8=0,2 et de raison q=0,5.**

4.b. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$

$p_n = v_n + 0{,}8 = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$

4.c. $0 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8$.

La suite (p_n) converge vers 0,8.